Věta 4.4.7. Dvěma bodům Y, Z neležícím ve vrcholu $\mathbf{P}_r''$ kvadriky $\mathbf{Q}$ je přiřazena stejná polární nadrovina právě tehdy, je-li přímka YZ různoběžná s vrcholem $\mathbf{P}_r''$.

Je zřejmé, že polární nadrovina každého bodu obsahuje vrchol kvadriky $\mathbf{Q}$. Odtud vyplývá, že je-li kvadrika $\mathbf{Q}$ singulární, polarita nezobrazí množinu $\overline{\mathbf{A}_n^{\mathrm{C}}} \setminus \mathbf{P}_r''$ na množinu $\mathbf{M}$. Nechť tedy nyní je kvadrika $\mathbf{Q}$ regulární. Zvolme bázi $\mathscr{B}$ prostoru $\mathbf{W}_{n+1}^{\mathrm{C}}$. Je-li v této bázi $Y = (y_0, \ldots, y_n)$, polární nadrovina bodu Y má rovnici

$$\sum_{i,j=0}^{n} f_{ij} y_i x_j = 0$$

nebo, což je totéž,

$$\sum_{j=0}^{n} \Big(\sum_{i=0}^{n} f_{ij} y_i \Big) x_j = 0.$$

Buď nyní $\varrho \in \mathbf{M}$ libovolná nadrovina. Nechť

$$\sum_{j=0}^{n} a_j x_j = 0$$

je její rovnice. K tomu, aby ϱ byla polární nadrovina bodu Y, zřejmě stačí, aby platilo

$$(10) \qquad \sum_{i=0}^{n} f_{ij} y_i = a_j, \qquad j = 0, \ldots, n.$$

Zapíšeme-li rovnosti (10) v maticovém tvaru, dostaneme

$$(11) \qquad (y_0, \ldots, y_n) \, \mathbf{F} = (a_0, \ldots, a_n),$$

kde $\mathbf{F}$ je matice bilineární formy f. Máme-li nadrovinu ϱ, určíme snadno bod Y z rovnice (11)

$$(12) \qquad (y_0, \ldots, y_n) = (a_0, \ldots, a_n) \, \mathbf{F}^{-1}.$$

Tudíž platí následující věta.

Věta 4.4.8. Je-li $\mathbf{Q}$ regulární kvadrika, je polarita vzhledem ke kvadrice $\mathbf{Q}$ vzájemně jednoznačné zobrazení prostoru $\overline{\mathbf{A}_n^{\mathrm{C}}}$ na množinu $\mathbf{M}$ všech nadrovin tohoto prostoru.

Důkaz. Že polarita je zobrazení prosté, plyne z věty 4.4.7, že je to zobrazení na $\mathbf{M}$, vyplývá z rovnosti (12).

To, že v případě regulární kvadriky $\mathbf{Q}$ je polarita zobrazení na $\mathbf{M}$, jsme mohli snadno dokázat též přímo bez použití soustavy souřadnic. Právě tak obráceně větu 4.4.7 lze dokázat ze vztahu (11).

Cvičení

1. V prostoru $\overline{\mathbf{A}_3^{\mathrm{C}}}$ je dána kvadrika rovnicí
   a) $x_0x_1 + x_0x_3 + x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2x_3 - 2x_3^2 = 0$,
   b) $x_0^2 + x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_0x_3 = 0$,
   c) $x_0x_1 + x_0x_3 + x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2x_3 - 2x_3^2 = 0$.
   Určete její vrchol $\mathbf{P}'$.
2. Ověřte, že bod $A = (4, 4, -4, -1)$ leží na kvadrice $\mathbf{Q}$: $x_0^2 - 2x_0x_1 + 4x_0x_3 + 2x_2^2 = 0$ v prostoru $\overline{\mathbf{A}_3^{\mathrm{C}}}$ a určete rovnici tečné nadroviny kvadriky $\mathbf{Q}$ v bodě A.
3. V rovině $\overline{\mathbf{A}_2^{\mathrm{C}}}$ napište rovnice tečen t_1, t_2 vedených z bodu $A = (0, 1, -1)$ ke kuželosečce $2x_0^2 - 2x_1x_2 - x_1^2 - 4x_2x_0 + 3x_2^2 = 0$. Na tečnách t_1, t_2 určete body dotyku T_1, T_2.
4. V prostoru $\overline{\mathbf{A}_3^{\mathrm{C}}}$ je dána kvadrika $\mathbf{Q}$ rovnicí $-x_0^2 + 4x_0x_1 - 2x_1x_3 + 2x_2^2 + x_3^2 = 0$. Určete rovnice tečných rovin τ_1, τ_2 kvadriky $\mathbf{Q}$ procházejících přímkou PQ, kde $P = (-3, 1, -2, -4)$, $Q = (22, 0, 7, 34)$. V tečných rovinách τ_1, τ_2 nalezněte body dotyku T_1, T_2.

4.5 Afinní vlastnosti kvadrik

V tomto odstavci si budeme všímat souvislostí mezi teorií kuželoseček a kvadratických ploch vyloženou v kapitole 3 v [G] a teorií kvadrik, kterou se zabýváme nyní.

Mějme tedy v reálné afinní rovině $\mathbf{A}_2$ zvolenu lineární soustavu souřadnic $\mathscr{L}$ danou repérem $\langle P; \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \rangle$. Nechť v této lineární soustavě souřadnic je kuželosečka k daná rovnicí

$$(1) \qquad ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

tj. bod $X = [x, y]$ leží na kuželosečce k právě tehdy, je-li splněna rovnice (1). Utvoříme komplexní rozšíření $\mathbf{A}_2^{\mathrm{C}}$ roviny $\mathbf{A}_2$ a projektivní rozšíření $\overline{\mathbf{A}_2^{\mathrm{C}}}$ afinní roviny $\mathbf{A}_2^{\mathrm{C}}$. V aritmetické bázi $\mathscr{B} = \langle (1, P), \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \rangle$ má každý bod $X \in \mathbf{A}_2^{\mathrm{C}}$ homogenní souřadnice x_0, x_1, x_2, přičemž $x_0 \neq 0$. Potom jeho lineární souřadnice jsou $x = x_1/x_0$, $y = x_2/x_0$. Tudíž $X \in k$ právě tehdy, když

$$a(x_1/x_0)^2 + 2b(x_1/x_0)(x_2/x_0) + c(x_2/x_0)^2 + 2d(x_1/x_0) + 2e(x_2/x_0) + f = 0.$$

Po vynásobení výsledné rovnice číslem x_0^2 dostaneme

$$(2) \qquad ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + 2dx_1x_0 + 2ex_2x_0 + fx_0^2 = 0.$$

Ukázali jsme, jak z rovnice (1) můžeme dostat rovnici (2). Snadno uděláme obrácený postup. Nejdříve si uvědomíme, že má-li bod $X \in \mathbf{A}_2^{\mathrm{C}}$ souřadnice x, y v lineární soustavě souřadnic $\mathscr{L}$, má homogenní souřadnice $1, x, y$ v aritmetické bázi $\mathscr{B}$. Je-li tedy kuželosečka $\bar{k}$ dána v rovině $\overline{\mathbf{A}_2^{\mathrm{C}}}$ rovnicí (2), dostaneme rovnici (1)

Klasifikace kvadrik v $\overline{\mathbf{A}}_3^{\mathrm{C}}$

$[p, q]$	$[p_v, q_v]$	Název (popis) kvadriky	Rovnice v $\mathscr{L}_0$, resp. $\mathscr{B}_0$
[4, 0]	[3, 0]	imaginární elipsoid	$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$
[3, 1]	[3, 0]	elipsoid	$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$
[3, 1]	[2, 1]	dvojdílný hyperboloid	$x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$
[3, 1]	[2, 0]	eliptický paraboloid	$2x + y^2 + z^2 = 0$
[2, 2]	[2, 1]	jednodílný hyperboloid	$x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$
[2, 2]	[1, 1]	hyperbolický paraboloid	$2x + y^2 - z^2 = 0$
[3, 0]	[3, 0]	imaginární kužel	$x^2 + y^2 + z^2 = 0$
[3, 0]	[2, 0]	imaginární válec	$x^2 + y^2 + 1 = 0$
[2, 1]	[2, 1]	kužel	$x^2 + y^2 - z^2 = 0$
[2, 1]	[2, 0]	eliptický válec	$x^2 + y^2 - 1 = 0$
[2, 1]	[1, 1]	hyperbolický válec	$x^2 - y^2 - 1 = 0$
[2, 1]	[1, 0]	parabolický válec	$2x + y^2 = 0$
[2, 0]	[2, 0]	imaginární různoběžné roviny	$x^2 + y^2 = 0$
[2, 0]	[1, 0]	imaginární rovnoběžné roviny	$x^2 + 1 = 0$
[1, 1]	[1, 1]	reálné různoběžné roviny	$x^2 - y^2 = 0$
[1, 1]	[1, 0]	reálné rovnoběžné roviny	$x^2 - 1 = 0$
[1, 1]	[0, 0]	nevlastní rovina a vlastní rovina	$x_0 x_1 = 0$
[1, 0]	[1, 0]	jedna vlastní rovina	$x^2 = 0$
[1, 0]	[0, 0]	nevlastní rovina	$x_0^2 = 0$

Cvičení

Zadání všech cvičení jsou v rovině $\mathbf{A}_2^{\mathrm{C}}$ v dané lineární soustavě souřadnic.

1. Určete množinu $\mathbf{M}$ všech středů kuželosečky

a) $-x^2 + 2xy + 3y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$,

b) $x^2 + 6xy + 9y^2 - 4x + 1 = 0$,

c) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 4x - 8y + 3 = 0$.

2. Napište rovnice asymptot kuželosečky

a) $3x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 2 = 0$,

b) $2x^2 + xy - 3y^2 + 5y - 2 = 0$.

3. Určete druh kuželoseček ze cvičení 1 a 2.

4. Určete druh kuželosečky

a) $x^2 + 2xy + 2y^2 - 2y + 2 = 0$,

b) $x^2 + xy + y^2 - x + 2y = 0$,

c) $4x^2 - 12xy + 9y^2 + 4x - 6y + 2 = 0$,

d) $4x^2 + 4xy + 2y^2 - 8x + 2y + 13 = 0$.

5. Napište rovnici kuželosečky, je-li dáno:

a) $S = [1, 0]$ je střed, $y = 1$ je tečna s bodem dotyku $T = [0, 1]$, $A = [0, -3]$ je bod kuželosečky.

b) $x - y = 0$ je asymptota, osa x je průměr sdružený se směrem určeným vektorem $\boldsymbol{u} = (1, 2)$ a body $A = [1, -1]$, $B = [-1, 2]$ jsou konjugované.

4.6 Metrické vlastnosti kvadrik

V tomto odstavci budeme pracovat v euklidovském prostoru $\mathbf{E}_n$. Jeho zaměření budeme označovat $\mathbf{V}_n$ a skalární součin dvou vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbf{V}_n$ budeme značit $\boldsymbol{u} . \boldsymbol{v}$. Protože euklidovský prostor je vlastně zvláštní případ afinního prostoru (přesněji řečeno struktura euklidovského prostoru zahrnuje jako svou část i strukturu afinního prostoru), můžeme utvořit prostor $\mathbf{E}_n^{\mathrm{C}}$ – komplexní rozšíření euklidovského prostoru, i prostor $\overline{\mathbf{E}}_n^{\mathrm{C}}$ – projektivní rozšíření prostoru $\mathbf{E}_n^{\mathrm{C}}$. Skalární součin je bilineární forma na prostoru $\mathbf{V}_n$. Proto ho můžeme rozšířit i na vektorový prostor $\mathbf{V}_n^{\mathrm{C}}$. Pro dva vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbf{V}_n^{\mathrm{C}}$, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 + \mathrm{i}\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \mathrm{i}\boldsymbol{v}_2$ ($\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathbf{V}_n$) pak bude platit (viz věta 4.1.2):

$$\boldsymbol{u} . \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{u}_1 + \mathrm{i}\boldsymbol{u}_2)(\boldsymbol{v}_1 + \mathrm{i}\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{u}_1 . \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{u}_2 . \boldsymbol{v}_2 + \mathrm{i}(\boldsymbol{u}_1 . \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{u}_2 . \boldsymbol{v}_1) \tag{1}$$

V prostoru $\overline{\mathbf{E}}_n^{\mathrm{C}}$ budeme opět zkoumat kvadriky. Budeme předpokládat, že $\mathbf{Q}$ je kvadrika v prostoru $\overline{\mathbf{E}}_n^{\mathrm{C}}$ daná rovnicí $f_2(\boldsymbol{x}) = 0$. Ponecháme i další označení, která jsme zavedli v prostoru $\overline{\mathbf{A}}_n^{\mathrm{C}}$. Např. nevlastní nadrovinu budeme značit v, $\mathbf{W}_{n+1}^{\mathrm{C}}$ bude aritmetický základ prostoru $\overline{\mathbf{E}}_n^{\mathrm{C}}$ atd.

Nejdříve budeme definovat tzv. hlavní směry kvadratické formy na prostoru $\mathbf{V}_n$. Jestliže budeme hledat hlavní směry kvadratické formy f_2 a $\mathbf{Q}$ bude středová kuželosečka v $\overline{\mathbf{E}}_2^{\mathrm{C}}$, ukáže se, že hlavní směry budou směry jejích os. U paraboly to však bude směr osy a směr vrcholové tečny. Proto také volíme nový termín – hlavní směry. Směr je přitom tak jako dříve jednorozměrný podprostor prostoru $\mathbf{V}_n^{\mathrm{C}}$ – nevlastní bod prostoru $\overline{\mathbf{E}}_n^{\mathrm{C}}$.

Definice 4.6.1. Směr $U \in \overline{\mathbf{E}}_n^{\mathrm{C}}$ generovaný vektorem $\boldsymbol{u} \in \mathbf{V}_n^{\mathrm{C}}$ nazýváme *hlavní směr* kvadratické formy f_2, resp. hlavní směr kvadriky $\mathbf{Q}$, je-li konjugovaný s každým směrem na něj kolmým.

Ukážeme si výpočet hlavních směrů kvadratické formy. K tomu, aby U byl hlavní směr, je nutné a stačí, aby byla splněna pro každý vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}_n^{\mathrm{C}}$ podmínka

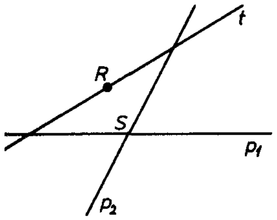
$$\boldsymbol{u} . \boldsymbol{x} = 0 \Rightarrow f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}) = 0 \tag{2}$$

(to plyne přímo z definice 4.6.1). Bereme-li ve vztahu (2) vektor $\boldsymbol{u}$ pevně, jsou výrazy $\boldsymbol{u} . \boldsymbol{x}$ a $f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x})$ lineární formy proměnného vektoru $\boldsymbol{x}$. Z anulování jedné lineární formy vyplývá anulování druhé. To platí právě tehdy, je-li druhá lineární forma násobkem první lineární formy. Vektor $\boldsymbol{u}$ tudíž určuje hlavní směr právě tehdy, existuje-li číslo $c \in \mathbf{R}$ tak, že

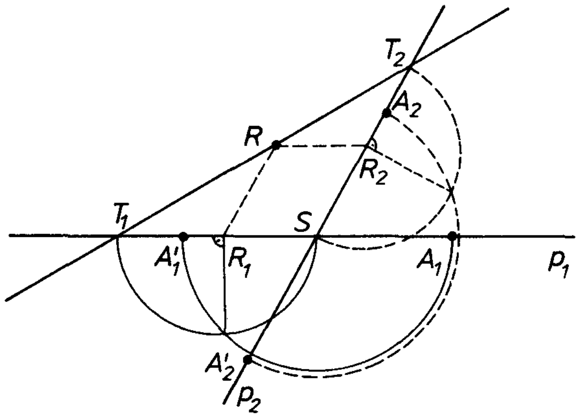
$$f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}) = c\boldsymbol{u} . \boldsymbol{x} \tag{3}$$

pro každý vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}_n^{\mathrm{C}}$. Nyní zvolíme ortonormální bázi $\langle \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ prostoru $\mathbf{V}_n$.

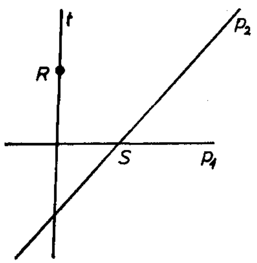
Příklad 3. Na obr. 52 je dána hyperbola sdruženými průměry p_1, p_2 a tečnou t s bodem dotyku R. Určete hlavní osu hyperboly, její průsečíky s hyperbolou a asymptoty hyperboly.



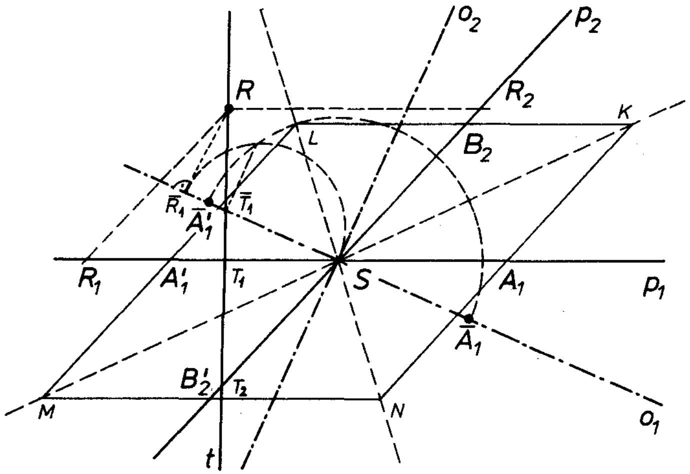
Obr. 50



Obr. 51



Obr. 52



Obr. 53

Řešení. Postup sledujeme na obr. 53. Pomocí Euklidovy věty najdeme body A_1, $A_1' \in p_1$ a B_2, $B_2' \in p_2$ tak, aby platily vztahy (22), (23) (z důvodu přehlednosti obrázku není tato konstrukce vyznačena). Sestrojíme rovnoběžník $KLMN$ (viz obr. 49). Jeho úhlopříčky jsou asymptoty hyperboly. Osy o_1, o_2 úhlů, které asymptoty svírají, jsou osy hyperboly. Z polohy tečny t a bodu dotyku R je zřejmé, která z os o_1, o_2 protíná hyperbolu – je to osa o_1. Její průsečíky $\bar{A}_1$, $\bar{A}_1'$

s hyperbolou určíme podle vzorce (22) z bodů $\bar{R}_1$ a $\bar{T}_1$ (konstrukce je na obr. 53 skutečně provedena). Tím je příklad vyřešen.

Cvičení

1. Pro danou kuželosečku $\mathbf{Q}$ zjistěte, zda je regulární nebo singulární. Je-li kuželosečka $\mathbf{Q}$ singulární, určete přímky, které ji tvoří. Jestliže kuželosečka $\mathbf{Q}$ je regulární, určete její střed S (je-li $\mathbf{Q}$ středová kuželosečka), resp. vrchol V (je-li $\mathbf{Q}$ parabola), vektory $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ tvořící ortonormální bázi a určující hlavní směry a napište rovnici kuželosečky $\mathbf{Q}$ v kartézské soustavě souřadnic $\mathscr{L}$ určené repérem $\langle S; \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\rangle$, resp. $\langle V; \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\rangle$. Kuželosečka $\mathbf{Q}$ je přitom dána následující rovnicí

   a) $2x^2 + 4xy + 5y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$,
   b) $2x^2 + 3xy - 2y^2 + x + 7y - 3 = 0$,
   c) $-3x^2 + 6xy + 5y^2 - 4x - 1 = 0$,
   d) $4x^2 + 4xy + 2y^2 + 4x - 2y + 5 = 0$,
   e) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 6x - 12y + 9 = 0$,
   f) $x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 4y - 1 = 0$,
   g) $5x^2 + 12xy + 10y^2 - 4y + 2 = 0$,
   h) $x^2 + 2xy + y^2 + 4x + 4y + 5 = 0$.

2. Napište rovnici kuželosečky, je-li v dané kartézské soustavě souřadnic dáno:
   a) $x + y + 2 = 0$ je osa, $\boldsymbol{u} = (1, 0)$ určuje směr asymptoty, $x = 1$ je tečna s bodem dotyku $T = [1, 0]$.
   b) $x + 2y = 0$ je osa, kuželosečka je parabola a souřadnicová osa x je tečna s bodem dotyku $T = [1, 0]$.

4.7 Svazky kvadrik

V kapitole 1 v [G] jsme zkoumali svazky nadrovin. Přitom jsme každou nadrovinu měli určenou lineární funkcí (vlastně rovnicí). Svazek nadrovin byla množina všech nadrovin přiřazených nenulovým lineárním funkcím z dvojrozměrného vektorového podprostoru prostoru všech lineárních funkcí. U kvadrik je situace obdobná: Všechny kvadratické formy na vektorovém prostoru $\overline{\mathbf{A}}^{\mathbf{C}}_n$ je situace obdobná: Všechny kvadratické formy na vektorovém prostoru $\mathbf{W}_{n+1}$ tvoří vektorový prostor s obvyklými operacemi (sčítání kvadratických forem a násobení kvadratické formy číslem z $\mathbf{C}$). Každé nenulové kvadratické formě je přiřazena kvadrika v prostoru $\overline{\mathbf{A}}^{\mathbf{C}}_n$. Přitom dvěma kvadratickým formám jsou přiřazeny stejné kvadriky právě tehdy, je-li jedna z těchto forem násobkem druhé kvadratické formy. Můžeme tedy definovat svazky kvadrik téměř stejně jako jsme definovali svazky nadrovin. Právě tak můžeme na svazky kvadrik převést některá tvrzení i s důkazy.

4.2 Kvadratické formy

1. a) $\begin{pmatrix} 1, & -5/2, & 2 \\ -5/2, & 1, & -1 \\ 2, & -1, & -3 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 0, & 1/2, & 0 \\ 1/2, & 0, & -1/2 \\ 0, & -1/2, & 0 \end{pmatrix}$

2. a) $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -5x_1'^2 - 10x_1'x_2' + 5x_1'x_3' - 5x_2'x_3' + 2x_3'^2$,
b) $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1'^2 + 3x_1'x_2' + x_2'^2$.

3. a) $\boldsymbol{u}_1' = \boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2' = -2\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_3$, $\boldsymbol{u}_3' = 19\boldsymbol{u}_1 + 14\boldsymbol{u}_2 + 8\boldsymbol{u}_3$ ($\boldsymbol{u}_3'$ dán až na nenulový násobek)
$f_2(\mathbf{x}) = x_1'^2 - 7x_2'^2 - 532x_3'^2$,
b) $\boldsymbol{u}_1' = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_2' = \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3$, $\boldsymbol{u}_3' = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_3$ ($\boldsymbol{u}_3'$ dán až na nulový násobek)
$f_2(\mathbf{x}) = x_1'^2 - x_2'^2$.

4.4 Polární vlastnosti kvadratik

1. a) $\mathbf{P}' = \overleftrightarrow{PQ}$, kde např. $P = (1, 0, -1, 0)$, $Q = (2, -1, 0, 1)$, b) $\mathbf{P}' = \emptyset$, c) $\mathbf{P}' = \{R\}$, kde $R = (1, 0, 0, -1)$

2. $x_0 + 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 0$

3. $t_1: x_0 - x_1 - x_2 = 0$, $t_2: x_0 + x_1 + x_2 = 0$, $T_1 = (2, 1, 1)$, $T_2 = (2, -3, 1)$

4. $\tau_1: -9x_0 + x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0$, $\tau_2: -5x_0 + 5x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 0$,
$T_1 = (1, -4, 2, 1)$, $T_2 = (3, -1, 3, 1)$

4.5 Afinní vlastnosti kvadrik

1. a) $\mathbf{M} = \{S\}$, $S = [-5/4, -1/4]$; b) $\mathbf{M} = \emptyset$; c) $\mathbf{M}$ je přímka $x + 2y - 2 = 0$

2. a) $x - y - 1 = 0$, $3x - y + 1 = 0$, b) $x - y + 1 = 0$, $2x + 3y - 2 = 0$

3. 1a) hyperbola, 1b) parabola, 1c) dvě rovnoběžky, 2a) hyperbola, 2b) dvě různoběžky

4. a) imaginární elipsa, b) elipsa, c) imaginární rovnoběžky, d) imaginární různoběžky

5. a) $x^2 + 2xy - y^2 - 2x - 2y + 3 = 0$, b) $2x^2 - 2xy + 5 = 0$

4.6 Metrické vlastnosti kvadrik

1. a) **Q** je elipsa, $S = [3/2, -1]$, $\boldsymbol{u}_1 = (2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5})$, $\boldsymbol{u}_2 = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$, **Q**: $2x'^2 + 12y'^2 = 1$
b) **Q** je singulární, tvoří ji přímky $x + 2y - 1 = 0$ a $2x - y + 3 = 0$
c) **Q** je hyperbola, $S = [-5/12, 1/4]$, $\boldsymbol{u}_1 = (1/\sqrt{10}, 3/\sqrt{10})$, $\boldsymbol{u}_2 = (3/\sqrt{10}, -1/\sqrt{10})$, **Q**: $36x'^2 - 24y'^2 = 1$
d) **Q** je singulární, tvoří ji přímky $2x + (1 + \mathrm{i})\,y + 1 - 2\mathrm{i} = 0$ a $2x + (1 - \mathrm{i})\,y + 1 + 2\mathrm{i} = 0$

e) **Q** je singulární, tvoří ji přímka $x - 2y + 3 = 0$
f) **Q** je parabola, $V = [-7/12, 1/12]$, $\boldsymbol{u}_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $\boldsymbol{u}_2 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, **Q**: $y' = (\sqrt{2}/3)\,x'^2$
g) **Q** je imaginární elipsa, $S = [-6/7, -5/7]$, $\boldsymbol{u}_1 = (3/\sqrt{13}, -2/\sqrt{13})$, $\boldsymbol{u}_2 = (2/\sqrt{13}, 3/\sqrt{13})$, **Q**: $x'^2 + 14y'^2 + 4/7 = 0$
h) **Q** je singulární, tvoří ji přímky $x + y + 2 - \mathrm{i} = 0$ a $x + y + 2 + \mathrm{i} = 0$

2. a) $xy + 3x - y - 3 = 0$, b) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x + y + 1 = 0$