Geometrie

Michal Zamboj

Pedagogická fakulta

2019

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~zamboj/

Vektorový prostor

Definice (Vektorový prostor)

Je dáno těleso $\mathbb{T}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Vektorovým prostorem **V** nad tělesem $\mathbb{T}$ rozumíme množinu V spolu s binární operací $+$ $(\mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V})$ a operací $\cdot$ násobení prvků z V prvkem z $\mathbb{T}$ $(\mathbb{V} \times \mathbb{T} \to \mathbb{V})$, pro které platí následující axiomy:

1.1 Pro libovolné $\vec{u}, \vec{v} \in V$ platí $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

1.2 Pro libovolné $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ platí $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$.

1.3 $\exists\ \vec{o} \in V; \vec{o} + \vec{u} = \vec{u}$.

1.4 Pro každé $\vec{u} \in V, \exists - \vec{u} \in V; \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{o}$.

2.1 Pro libovolné $\vec{u} \in V$ a $a, b \in \mathbb{T}$ platí $a \cdot (b \cdot \vec{u}) = (a \cdot b) \cdot \vec{u}$.

2.2 Pro libovolné $\vec{u} \in V$ platí $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$.

2.3 Pro libovolné $\vec{u} \in V$ a $a, b, \in \mathbb{T}$ platí $(a + b) \cdot \vec{u} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{u}$.

2.4 Pro libovolné $\vec{u}, \vec{v} \in V$ a $a \in \mathbb{T}$ platí $a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = a \cdot \vec{u} + a \cdot \vec{v}$.

$\mathbb{R}^n$ nazýváme aritmetický vektorový prostor

Vektorový prostor

Definice (Vektorový podprostor)

Neprázdnou množinu $\mathbf{W} \subset \mathbf{V}$ nazveme *vektorovým podprostorem* prostoru $\mathbf{V}$, jestliže

- $\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbf{W}; \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in \mathbf{W}$,
- $\forall a \in \mathbb{R}, \forall \overrightarrow{u} \in \mathbf{W}; a \cdot \overrightarrow{u} \in \mathbf{W}$.

Věta (Vlastnosti vektorových podprostorů)

- $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_k} \in \mathbf{W} \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} a_i \overrightarrow{u_i} \in \mathbf{W}$
- $\overrightarrow{o} \in \mathbf{W}$
- *Každý podprostor vektorového prostoru je vektorový prostor.*

Vektorový prostor

Definice (LNZ a LZ)

Konečná množina vektorů $\mathbf{S} = \overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_k}$ vektorového prostoru $\mathbf{V}$ se nazývá *lineárně nezávislá*, jestliže rovnice

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \overrightarrow{v_i} = 0$$

má jediné řešení $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0$. V opačném případě se nazývá *lineárně závislá*.

Definice (Lineární kombinace)

Vektor $\overrightarrow{v}$ vektorového prostoru $\mathbf{V}$ se nazývá *lineární kombinací* vektorů $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_k} \in \mathbf{V}$, jestliže existují skaláry $a_1, a_2, \ldots, a_k$ takové, že $\overrightarrow{v} = \sum_{i=1}^{k} a_i \overrightarrow{v_i}$.

Vektorový prostor

Definice (Báze)

Báze je množina lineárně nezávislých vektorů, které generují celý vektorový prostor.

Definice (Dimenze (rozměr) vektorového prostoru)

Dimenzí $\dim \mathbf{V}$ vektorového prostoru $\mathbf{V}$ budeme rozumět mohutnost jeho libovolné báze.
Zn. $\mathbf{V}^n$ je vektorový prostor dimenze n, resp. n-rozměrný vektorový prostor.

Afinní prostor

Definice (Afinní prostor)

Mějme danou neprázdnou množinu $\mathbf{A}$, vektorový prostor $\mathbf{V}^n(\mathbb{T})$ a zobrazení $f : \mathbf{A} \times \mathbf{A} \to \mathbf{V}^n$. Trojicí $(\mathbf{A}, \mathbf{V}^n, f)$ nazýváme *n-rozměrný afinní prostor*, jestliže platí:

1. Pro každé $X, Y, Z \in \mathbf{A}$ je $f(X, Y) + f(Y, Z) = f(X, Z)$.

   linearita

2. Existuje $P \in \mathbf{A}$ tak, že zobrazení f_P množiny $\mathbf{A}$ do prostoru $\mathbf{V}^n$, přiřazující každému $X \in \mathbf{A}$ vektor $f(P, X)$, je vzájemně jednoznačné.

   bod $\leftrightarrow$ vektor

$\mathbf{A}$ je *nosič afinního prostoru*,

$\mathbf{V}^n$ je *zaměření afinního prostoru*,

prvky množiny $\mathbf{A}$ nazýváme *body afinního prostoru*,

$\mathbb{A}^1$ je afinní přímka, $\mathbb{A}^2$ je afinní rovina,

vektor $f(X, Y)$ zapisujeme ve tvaru $(Y - X)$

Afinní prostor

Definice (Repér)

Buď $P \in \mathbb{A}^n$ a $\beta = (\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ buď báze $\mathbf{V}^n$. Potom uspořádanou $(n+1)$-tici $\mathcal{R} = (P; \overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ nazýváme *repér* v prostoru $\mathbb{A}^n$.

Definice (LSS)

Mějme v prostoru $\mathbb{A}^n$ dán repér $\mathcal{R} = (P; \overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$. Zobrazení $\mathcal{L}$, které každému bodu $X \in \mathbb{A}^n$ přiřadí n-tici $[x_1, \ldots, x_n]$ definovanou vztahem $X = P + x_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n}$, nazýváme *lineární soustava souřadnic* určená repérem $\mathcal{R}$.

- bod P nazýváme *počátek* LSS $\mathcal{L}$,
- $\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}$ nazýváme souřadnicové vektory,
- $[x_1, \ldots, x_n]$ souřadnice bodu X vzhledem k LSS $\mathcal{L}$ určené repérem $\mathcal{R}$
- zn. $X = [x_1, \ldots, x_n]$

Afinní podprostory

Parametrické vyjádření podprostoru $\mathbb{R}^n$, procházejícího bodem P:

$$X = P + t_1\overrightarrow{u_1} + t_2\overrightarrow{u_2} + \cdots + t_n\overrightarrow{u_n}$$

t.j.:

$$x_1 = p_1 + t_1 u_{1_1} + t_2 u_{2_1} + \cdots + t_n u_{n_1}$$

$$\vdots$$

$$x_n = p_n + t_1 u_{1_n} + t_2 u_{2_n} + \cdots + t_n u_{n_n}$$

pro $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$

Obecná rovnice nadroviny $\mathbb{R}^n$:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n + a_{n+1} = 0,$$

pro $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$

Vzájemná poloha afinních podprostorů

Věta (Průnik podprostorů)

Afinní podprostory $\mathbb{A}^k\{U, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2} \dots\}$, $\mathbb{A}^l\{V, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \dots\}$ *prostoru* $\mathbb{A}^n, n \geq k, l$, *mají neprázdný průnik, právě když vektor* $(U - V)$ *je lineární kombinací vektorů* $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \dots$.

- *incidentní*, jestliže jeden z nich je podprostorem druhého,
- *rovnoběžné*, jestliže vektorové zaměření jednoho z nich je podprostorem druhého,
- *různoběžné*, jestliže $\mathbb{A}^k, \mathbb{A}^l$ nejsou rovnoběžné a jejich průnik je neprázdný,
- *mimoběžné*, jinak.

Dělicí poměr

Definice (Dělicí poměr)

Nechť A, B, C jsou tři různé kolineární body. *Dělicí poměr bodu C vzhledem k bodům A, B*, je reálné číslo λ takové, že

$$\lambda(B - C) = (A - C).$$

Zn. $(AB; C)$ (taky (ABC))

Afinní zobrazení

Definice (Afinní zobrazení)

Nechť $\mathbb{A}^n$ a $\mathbb{A}'^m$ jsou dva afinní prostory. Zobrazení $f : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}'^m$ nazýváme *afinní zobrazení* prostoru $\mathbb{A}^n$ do prostoru $\mathbb{A}'^m$ právě tehdy, když pro všechny trojice různých kolineárních bodů $X, Y, Z \in \mathbb{A}^n$ platí:

- $X' = f(X), Y' = f(Y), Z' = f(Z)$ buďto splynou nebo jsou tři různé kolineární body.
- Je-li $X' \neq Y' \neq Z'$, tak $(XY; Z) = (X'Y'; Z')$

Definice (Afinita)

Afinita je vzájemně jednoznačné afinní zobrazení.

Pozn. afinita zachovává rovnoběžnost a dělicí poměr.

Analytické vyjádření afinity v $\mathbb{A}^2$

$$f : X \to X'$$
$$x' = ax + by + p_x$$
$$y' = cx + dy + p_y$$

$\overrightarrow{p} = (p_x, p_y)$ je vektor posunutí

Matice afinity **A**:

$$X' = \mathbf{A}X + \overrightarrow{p}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

A je regulární, t.j. ($\det \mathbf{A} \neq 0$)

Samodružné prvky afinity

Samodružné body:
$X = X'$

$$\begin{array}{l} x = ax + by + p_x \\ y = cx + dy + p_y \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} 0 = (a-1)x + by + p_x \\ 0 = cx + (d-1)y + p_y \end{array}$$

Samodružné směry:
$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u'}$

$$\begin{array}{l} \kappa u_1 = au_1 + bu_2 \\ \kappa u_2 = cu_1 + du_2 \end{array} \rightarrow \text{vlastní čísla } \mathbf{A}\text{, t.j.:} \begin{pmatrix} a-\kappa & b \\ c & d-\kappa \end{pmatrix}$$

Eukleidovský prostor

Definice (Skalární součin)

Skalární součin na vektorovém prostoru **V** je zobrazení $(\cdot) : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$, které splňuje pro všechna $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{V}$; $c \in \mathbb{R}$:

- pro $\vec{u} \neq \vec{o} : \vec{u} \cdot \vec{u} > 0$,
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$,
- $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$,
- $(c\vec{u}) \cdot \vec{v} = c(\vec{u} \cdot \vec{v})$.

$\vec{u} = (u_1, \dots, u_n), \vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

Eukleidovský prostor $\mathbb{E}^n$

Definice (Kolmost)

Je-li $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$ pro $\overrightarrow{u} \neq 0$, $\overrightarrow{v} \neq 0$, pak jsou vektory $\overrightarrow{u}$ a $\overrightarrow{v}$ na sebe *kolmé* $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$.

Definice (Velikost vektoru)

Velikost vektoru v je

$$\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}}$$

Pozn. velikost vektoru je *norma* (indukována skalárním součinem).

Eukleidovský prostor $\mathbb{E}^n$

Definice (Odchylka dvou vektorů)

Odchylka φ dvou vektorů $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ je

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|}$$

Definice (Vzdálenost)

Vzdálenost dvou bodů A, B je rovna velikosti vektoru $(A - B)$.

$$d(A, B) = \|A - B\|$$

Eukleidovský prostor $\mathbb{E}^n$

Vzdálenost bodu $P = [p_1, \dots p_n]$ od nadroviny $\rho = (Q, \overrightarrow{s_1}, \dots, \overrightarrow{s_n}) = a_1 x_1 + \dots a_n x_n + a_{n+1}$ je:

$$= d(A, \rho) = \frac{|\overrightarrow{n_\rho} \cdot (Q - P)|}{\|\overrightarrow{n_\rho}\|} = \frac{|a_1 p_1 + \cdots + a_n p_n + a_{n+1}|}{\|\overrightarrow{n_\rho}\|}$$

Vzdálenost bodu $P = [p_1, \dots p_n]$ od přímky $q = (Q, \overrightarrow{s})$ v $\mathbb{R}^3$ je:

$$d(P, q) = \sqrt{d(P, Q)^2 - \left(\frac{\overrightarrow{s} \cdot (Q - P)}{\|\overrightarrow{s}\|}\right)^2}$$

Klasifikace afinních zobrazení

$X' = \mathbf{A}X + \overrightarrow{p}$, kde $\mathbf{I}$ je matice identity

afinita	$\det \mathbf{A} \neq 0$
podobnost	$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = k^2\mathbf{I}$
stejnolehlost	$\mathbf{A} = \lambda\mathbf{I}, \lambda \neq 0$
shodnost	$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}$
středová souměrnost	$\mathbf{A} = -\mathbf{I}$
posunutí	$\mathbf{A} = \mathbf{I}$
identita	$\mathbf{A} = \mathbf{I}, \overrightarrow{p} = \overrightarrow{o}$

$\det \mathbf{A} > 0$ přímá
$\det \mathbf{A} < 0$ nepřímá

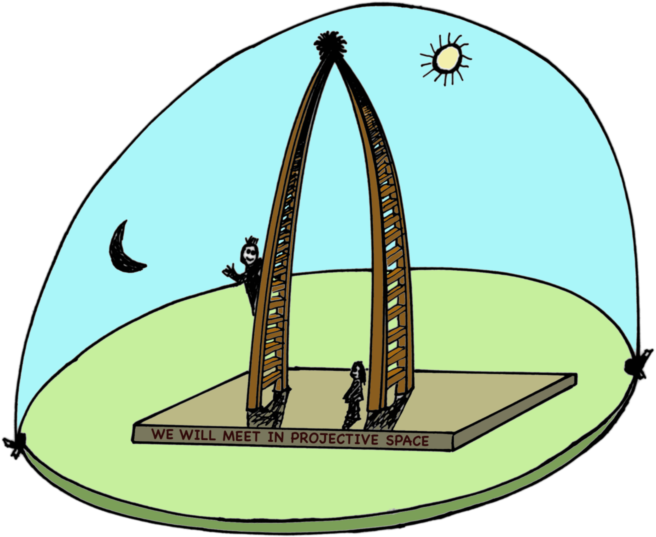
Projektivní rozšíření eukleidovského prostoru $\mathbb{RP}^3$

Ke každé přímce $p \in \mathbb{R}^3$ přidáme jeden bod P_∞, který je společný pro všechny rovnoběžky s p (směr). Bod P_∞ nazýváme *nevlastním bodem* přímky p.

Ke každé rovině $\rho \in \mathbb{R}^3$ přidáme jednu přímku p_∞, která je společná pro všechny roviny rovnoběžné s ρ. Přímku p_∞ nazýváme *nevlastní přímkou* roviny ρ.

K prostoru $\mathbb{R}^3$ přidáme rovinu ρ_∞, která je množinou všech nevlastních bodů a přímek prostoru $\mathbb{R}^3$. Rovinu ρ_∞ nazýváme *nevlastní rovinou* prostoru $\mathbb{R}^3$.

Projektivní rozšíření eukleidovského prostoru $\mathbb{RP}^3$



Projektivní rozšíření eukleidovského prostoru $\mathbb{RP}^3$

Definice ($\mathbb{RP}^3$)

Eukleidovský prostor $\mathbb{R}^3$ doplněný o nevlastní rovinu ρ_∞ nazýváme *projektivně rozšířený eukleidovský prostor*.
Zn. $\mathbb{RP}^3$.

Definice ($\mathbb{RP}^2$)

Eukleidovskou rovinu $\mathbb{R}^2$ doplněnou o nevlastní přímku p_∞ nazýváme *projektivně rozšířená eukleidovská rovina*.
Zn. $\mathbb{RP}^2$.

Princip duality

Každá věta geometrie roviny $\mathbb{RP}^2$ přechází v rovněž platnou *duální* větu geometrie roviny $\mathbb{RP}^2$, nahradíme-li v ní pojem bod pojmem přímka a naopak (případně jejich odvozenými pojmy ako průsečík, spojnice . . .).

- I1 Libovolnými dvěma různými body prochází právě jedna přímka.
- I1* Libovolné dvě různé přímky se protínají v právě jednom bodě.

Princip duality

V $\mathbb{RP}^3$ zaměňujeme pojem bod s pojmem rovina.

1 Pro každé tři nekolinární body *A*, *B*, *C* existuje právě jedna rovina ρ, která je s nimi incidentní.

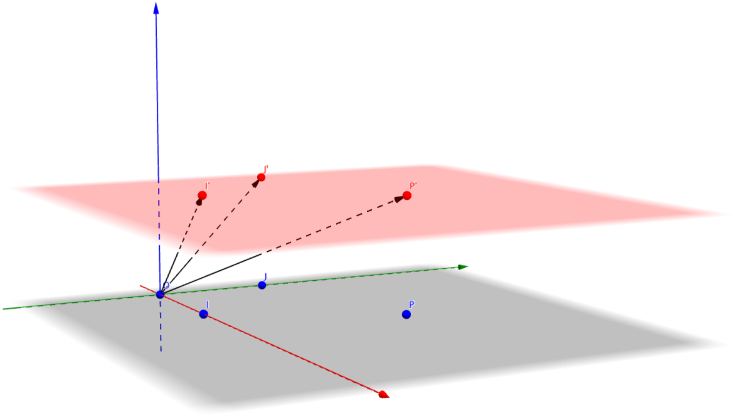
1* Pro každé tři roviny $\alpha.\beta,\gamma$ neprocházejíci jednou přímkou existuje právě jeden bod *P*, který je s nimi incidentní.

I1* Libovolné dvě různé roviny se protínají v právě jedné přímce.

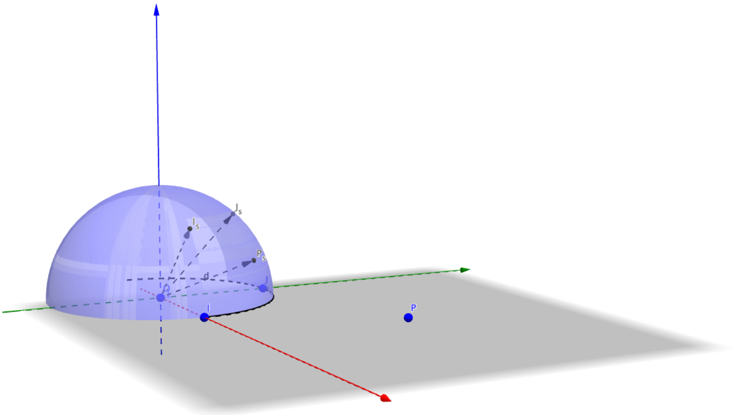
Homogenní souřadnice - Motivace

$X' = \mathbf{A}X + \overrightarrow{p}$ — nelíbí se nám, chtěli bychom jednu matici včetně posunutí
$ax + by + c = 0$ — rovnice přímky procházející daným bodem se dá napsat jednodušeji

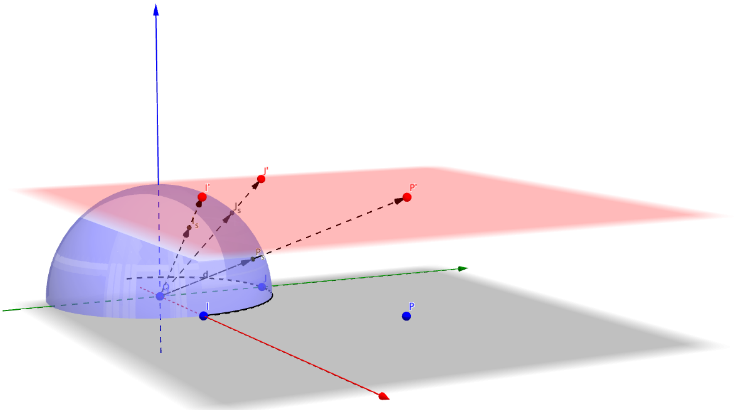
Homogenní souřadnice - Motivace



Homogenní souřadnice - Motivace



Homogenní souřadnice - Motivace



Homogenní souřadnice v $\mathbb{RP}^2$

Uspořádanou trojici $(x_1, x_2, x_0) \neq (0, 0, 0)$ nazýváme *homogenními souřadnicemi* bodu $X' \in \mathbb{RP}^2$.
Pozn. Někde taky (x_0, x_1, x_2).
Homogenní souřadnice jsou nezávislé na nenulovém násobku.
T.j. $(x_1, x_2, x_0) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_0)$ pro $\lambda \neq 0$.
Homogenní souřadnice určují bod X' jednoznačně.

Vlastní body:
Bodu $X = [x, y] \in \mathbb{R}^2$ odpovídá bod $X' = (x_1, x_2, x_0) \in \mathbb{RP}^2$, kde $x_0 \neq 0$.
Souřadnice bodu $X' = (x_1, x_2, x_0) = (\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, 1)$, t.j. $x = \frac{x_1}{x_0}, y = \frac{x_2}{x_0}$.
Pro $\lambda \neq 0$ platí $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_0) = (x_1, x_2, x_0)$.
X' nazýváme *vlastní bod* v $\mathbb{RP}^2$ pro $x_0 \neq 0$.

Homogenní souřadnice v $\mathbb{RP}^2$

Nevlastní body:

Nechť $X = [\kappa x, \kappa y] \in \mathbb{R}^2$, kterému odpovídá
$X' = (\kappa x, \kappa y, 1) \in \mathbb{RP}^2$.
$\lim_{\kappa \to \infty} (x, y, \frac{1}{\kappa}) = (x, y, 0)$
Směru $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ odpovídá bod $X'_\infty = (x, y, 0) \in \mathbb{RP}^2$.
X' nazýváme *nevlastní bod* v $\mathbb{RP}^2$ pro $x_0 = 0$.

Homogenní souřadnice v $\mathbb{RP}^2$

Uspořádanou trojici $\overrightarrow{u} = (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ nazýváme *homogenními souřadnicemi* přímky $p' \in \mathbb{RP}^2$.

Vlastní přímky:
Nechť je přímka v $\mathbb{R}^2$ dána obecnou rovnicí $p : ax + by + c = 0$.
V homogenních souřadnicích v $\mathbb{RP}^2$ máme
$p' : a\frac{x_1}{x_0} + b\frac{x_2}{x_0} + c = 0$, pro $x_0 \neq 0$, t.j.
$p' : ax_1 + bx_2 + cx_0 = 0 = (a, b, c) \cdot (x_1, x_2, x_0) = \overrightarrow{u} \cdot X'$
pro $x_0 = 0$ dostáváme jako řešení souřadnice nevlastního bodu $(-b, a, 0)$

Nevlastní přímka:
Přímka procházejíci nevlastními body např.
$I_\infty = (1, 0, 0), J_\infty = (0, 1, 0)$.
$p_\infty : (a, b, c) = I_\infty \times J_\infty = (0, 0, 1)$, t.j. obecná rovnice $x_0 = 0$.

Homogenní souřadnice v $\mathbb{RP}^3$

Uspořádanou čtveřici $(x_1, x_2, x_3, x_0) \neq (0, 0, 0, 0)$ nazýváme *homogenními souřadnicemi* bodu $X' \in \mathbb{RP}^3$.
Pro $\lambda \neq 0$ platí $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_0) = (x_1, x_2, x_3, x_0)$.

Vlastní body:
Pro $x_0 \neq 0$ odpovídá bodu $X = [\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \frac{x_3}{x_0}] \in \mathbb{R}^3$ vlastní bod $X' = (x_1, x_2, x_3, x_0) \in \mathbb{RP}^3$.

Nevlastní body:
Pro $x_0 = 0$ odpovídá směru $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ nevlastní bod $X'_\infty = (x, y, z, 0) \in \mathbb{RP}^3$.

Homogenní souřadnice v $\mathbb{RP}^3$

Uspořádanou čtveřici $\overrightarrow{u} = (a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0)$ nazýváme *homogenními souřadnicemi* roviny $\rho' \in \mathbb{RP}^3$.

Obecná rovnice roviny $\rho \in \mathbb{RP}^3$ je $\rho : ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_0 = 0$.
Nevlastní rovina má rovnici $x_0 = 0$.

Projektivní prostor $\mathbb{P}^n$

Definice (Projektivní prostor)

Nechť $\mathbf{V}_{n+1}$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{T}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ dimenze $n+1$; $n \geq 0$. Nechť $\sim$ je relace ekvivalence $\mathbf{V}_{n+1} \setminus \{\overrightarrow{o}\}$ definována následovně: pro
$\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{V}_{n+1}$, $\overrightarrow{u} \sim \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \lambda \overrightarrow{v}; 0 \neq \lambda \in \mathbb{T}$.
Projektivní prostor dimenze n je množina tříd ekvivalence $\mathbb{P}^n(\mathbf{V}_{n+1}) = (\mathbf{V}_{n+1} \setminus \{\overrightarrow{o}\}) / \sim$.

Dále značíme jenom $\mathbb{P}^n$.

Prvky (body) projektivního prostoru $\mathbb{P}^n$ jsou jednodimenzionální podprostory $\mathbf{V}_{n+1}$:
$X = \langle \overrightarrow{v} \rangle = \{\overrightarrow{u} \in \mathbf{V}_{n+1}; \overrightarrow{u} = \lambda \overrightarrow{v}; \lambda \neq 0; \lambda \in \mathbb{R}\}$.

$\mathbb{P}^2$ . . . projektivní rovina

$X \in \mathbb{P}^2$ je geometrický bod v projektivní rovině

$\overrightarrow{v} \in \mathbf{V}^3$ takový, že $\langle \overrightarrow{v} \rangle = X$ je aritmetický zástupce bodu X.

Pozn. Každý bod $X \in \mathbb{P}^n$ má nekonečně mnoho artimetických zástupců.

Projektivní prostor $\mathbb{P}^n$

Definice (LZ a LNZ body)

Body $A_1 = \langle\overrightarrow{a_1}\rangle, \dots, A_k = \langle\overrightarrow{a_k}\rangle$ nazveme *lineárně závislé (nezávislé)*, když jsou lineárně závislé (nezávislé) vektory $\overrightarrow{a_1}, \dots, \overrightarrow{a_k}$.

Definice (LK bodů)

Bod $A = \langle\overrightarrow{a}\rangle$ je *lineární kombinací* bodů $A_1, \dots, A_k$, jestliže vektor $\overrightarrow{a}$ je lineární kombinací vektorů $\overrightarrow{a_1}, \dots, \overrightarrow{a_k}$.
Zn. $A = \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_k A_k$.

Projektivní prostor $\mathbb{P}^n$

Definice (Projektivní systém souřadnic a aritmetická báze)

Projektivním systémem souřadnic (projektivním repérem, geometrickou bázi) prostoru $\mathbb{P}^n(\mathbf{V}_{n+1})$ rozumíme libovolnou uspořádanou $(n+2)$-tici bodů $(E_1, \ldots, E_n, E_0; J)$ z $\mathbb{P}^n$ takových, že libovolných $(n+1)$ z nich je lineárně nezávislých.

Uspořádanou $(n+1)$-tici vektorů $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}, \overrightarrow{e_0})$ nazýváme *aritmetickou bázi* vzhledem k projektivnímu systému souřadnic $(E_1, \ldots, E_n, E_0; J)$ právě tehdy když $\overrightarrow{e_i}$ je aritmetickým zástupcem bodu E_i a *jednotkový bod* J má aritmetického zástupce $\sum_{i=0}^{n} \overrightarrow{e_i}$.

$E_0, \ldots, E_n$ - základní body
J - jednotkový bod

Projektivní prostor $\mathbb{P}^n$

Definice (Projektivní homogenní souřadnice)

$(n+1)$-tici $(x_1, \ldots, x_n, x_0) \in \mathbf{V}^{n+1}$ přiřazenou každému bodu $X \in \mathbb{P}^n$ nazýváme *projektivní homogenní souřadnice bodu X* vzhledem k projektivnímu systému souřadnic $(E_1, \ldots E_n, E_0; J)$ právě tehdy když existuje aritmetická báze $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}, \overrightarrow{e_0})$ vzhledem k $(E_1, \ldots E_n, E_0; J)$, pro kterou platí $X = x_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n} + x_0\overrightarrow{e_0}$.

Projektivní podprostory

Definice (Projektivní podprostor)

Množina všech bodů v $\mathbb{P}^n$, které jsou lineární kombinací $k+1$ lineárně nezávislých bodů $X_0, X_1, \ldots, X_k$ se nazývá *k-rozměrný projektivní podprostor* $\mathbb{P}^k \subset \mathbb{P}^n$.

$k = 0$ ... projektivní bod

$k = 1$ ... projektivní přímka

$k = 2$ ... projektivní rovina

$k = n - 1$ ... projektivní nadrovina

$k = -1$ ... prázdná množina

Projektivní podprostory

Parametrické vyjádření podprostoru $\mathbb{P}^k \subset \mathbb{P}^n$, určeného $(k+1)$ lineárně nezávislými body $X_0, \ldots, X_k$:

$$X = \sum_{i=0}^{k} t_i X_i;\ \ t_i \in \mathbb{R}, (t_0, t_1, \ldots, t_k) \neq (0, 0, \ldots, 0)$$

Obecná rovnice nadroviny $\mathbb{P}^n$:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n + a_0 x_0 = 0, \qquad \text{pro } (a_0, a_1, \ldots, a_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$$

Přechod od $\mathbb{P}^n$ k $\mathbb{A}^n$

Buď $\mathbb{P}^n$ projektivní prostor a $\mathbf{V}_{n+1}$ jeho (aritmetický) vektorový základ.
Volíme nadrovinu ω_0 s vektorovým základem $\mathbf{W}_n \subset \mathbf{V}_{n+1}$
V $\mathbb{P}^n$ volíme geometrickou bázi $(E_0, E_1, \dots, E_n; J)$ tak, že
$E_1, \dots, E_n \in \omega_0$ a $E_0, J \notin \omega_0$.
t.j. rovnice $\omega_0 : x_0 = 0$.

Nechť $\mathbf{A} = \mathbb{P}^n \setminus \omega_0 = \{\langle(x_1, \dots, x_n, x_0)\rangle \in \mathbb{P}^n;\ x_0 \neq 0\}$.
$X, Y \in \mathbf{A}$:
$X = \langle\overrightarrow{x}\rangle;\ \overrightarrow{x} = (\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}, 1);\ \overrightarrow{x} = \frac{x_1}{x_0}\overrightarrow{e_1} + \dots + \frac{x_n}{x_0}\overrightarrow{e_n} + \overrightarrow{e_0}$
$Y = \langle\overrightarrow{y}\rangle;\ \overrightarrow{y} = (\frac{y_1}{y_0}, \dots, \frac{y_n}{y_0}, 1);\ \overrightarrow{y} = \frac{y_1}{y_0}\overrightarrow{e_1} + \dots + \frac{y_n}{y_0}\overrightarrow{e_n} + \overrightarrow{e_0}$

Nechť f je zobrazení: $\mathbf{A} \times \mathbf{A} \to \mathbf{W}_n$
$f(X, Y) = \overrightarrow{XY} = (Y - X) = (\frac{y_1}{y_0} - \frac{x_1}{x_0})\overrightarrow{e_1} + \dots + (\frac{y_n}{y_0} - \frac{x_n}{x_0})\overrightarrow{e_n}$.

Pak trojice $(\mathbf{A}, \mathbf{W}_n, f)$ je afinní prostor $\mathbb{A}^n$ s repérem $(E_0; \overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$.
Obráceně umíme vytvořit *projektivně rozšířený afinní prostor*.

Projektivní zobrazení

Definice (Projektivní (kolineární) zobrazení)

Nechť $\mathbb{P}^n(\mathbf{V}_{n+1}), \mathbb{P}'^m(\mathbf{V}'_{m+1})$ jsou dva projektivní prostory a nechť zobrazení $\varphi : \mathbf{V}_{n+1} \to \mathbf{V}'_{m+1}$ je lineární zobrazení. Pak zobrazení $f : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}'^m$ definované předpisem $f(\langle \overrightarrow{u} \rangle) = \langle \varphi(\overrightarrow{u}) \rangle$ se nazývá *projektivní (kolineární) zobrazení*.

Definice (Kolineace)

Kolineace je vzájemně jednoznačné kolineární zobrazení.

Pozn. Kolineární zobrazení zobrazuje kolineární body X, Y, Z na kolineární body X', Y', Z' nebo do jednoho bodu $X' = Y' = Z'$.

Analytické vyjádření kolineárního zobrazení

$f : X \to X'$ indukováno $\varphi : \overrightarrow{x} \to \overrightarrow{x'}$

$\mathbf{A}_{(m+1,n+1)}$ je matice lineárního zobrazení φ.
$\overrightarrow{x'} = \mathbf{A}\overrightarrow{x} = \varphi(\overrightarrow{x})$
$f(\langle\overrightarrow{x}\rangle) = \langle\varphi(\overrightarrow{x})\rangle = \langle\mathbf{A}\overrightarrow{x}\rangle = \langle\overrightarrow{x'}\rangle$
resp. $f(X) = \qquad = \mathbf{A}X = X'$
Kolineární zobrazení je určeno až na násobek, t.j. třídou matic
$\widetilde{\mathbf{A}} = \{\rho\mathbf{A};\ \rho \in \mathbb{R};\ \rho \neq 0$ a platí $\varphi(\overrightarrow{x}) = \mathbf{A}\overrightarrow{x}\}$.

Matice kolineace v projektivní rovině $\mathbb{P}^2$ je: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

$\mathbf{A}$ je regulární čtvercová matice, t.j. $(\det \mathbf{A} \neq 0)$.

Samodružné body

Samodružný bod kolineace

$$f : f(\langle \overrightarrow{x} \rangle) = \langle \overrightarrow{x} \rangle \qquad f(X) = X$$

$$\langle \overrightarrow{x} \rangle = \langle \mathbf{A} \overrightarrow{x} \rangle \qquad X = \mathbf{A}X$$

$$\lambda \overrightarrow{x} = \mathbf{A} \overrightarrow{x},\ \lambda \neq 0 \qquad \lambda X = \mathbf{A}X$$

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \overrightarrow{x} = 0 \qquad (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})X = 0$$

Středová kolineace

Definice (Středová (osová) kolineace v rovině)

Středová (osová) kolineace je kolineace, která má přímku o samodružných bodů a nazýváme ji *osou kolineace* a samodružný bod $S \notin o$, který nazýváme *střed kolineace*. Body a jejich obrazy leží na přímkách procházejících středem S.

Středová kolineace je určena osou o, středem S a párem odpovídajících si bodů $A \to A'$.

Dvojpoměr

Definice (Dvojpoměr)

Nechť A, B, C, D jsou čtyři různé body na projektivní přímce a platí:

$$C = \gamma_1 A + \gamma_2 B$$
$$D = \delta_1 A + \delta_2 B,$$

potom číslo $(AB; CD) = \dfrac{\gamma_2\delta_1}{\gamma_1\delta_2}$ nazýváme dvojpoměr uspořádané čtveřice bodů A, B, C, D.

Pozn.: Bodu X můžeme přiřadit (projektivní) souřadnice přímky $X = \xi_1 A + \xi_2 B$.

Dvojpoměr

Volíme souřadnice bodů
$A = (1, 0)$; $B = (0, 1)$; $C = (\gamma_1, \gamma_2)$; $D = (\delta_1, \delta_2)$.
Dvojpoměr $(AB; CD)$ můžeme spočítat taky následovně:

$$(AB; CD) = \frac{\det(AC)\det(BD)}{\det(BC)\det(AD)} = \frac{\gamma_2\delta_1}{\gamma_1\delta_2}$$

Středová kolineace zachovává dvojpoměr (synteticky v $\mathbb{R}^2$)

Věta (Dvojpoměr bodů a přímek)

Nechť jsou dány čtyři různé body A, B, C, D na přímce p a bod O, který na ní neleží. Označme $\overline{AO} = a$ a podobně b, c, d Pak platí:

$$(AB; CD) = \frac{\sin(a, c)}{\sin(b, c)} : \frac{\sin(a, d)}{\sin(b, d)}.$$

$\sin(a, c)$ *je sinus orientovaného úhlu* $\sphericalangle(a, c)$.

Středová kolineace zachovává dvojpoměr (synteticky v $\mathbb{R}^2$)

Věta (Středová kolineace zachovává dvojpoměr)

Nechť jsou dány přímky p, p' a bod O, který neleží na žádné z nich. Promítneme-li čtyři různé body A, B, C, D přímky p z bodu O na přímku p' do bodů A', B', C', D', potom platí $(AB; CD) = (A'B'; C'D')$.

Kolineární zobrazení zachovává dvojpoměr

Věta (Kolineární zobrazení zachovává dvojpoměr)

Kolinární zobrazení čtyř různých bodů na čtyři různé body zachovává dvojpoměr.

Důkaz

Nechť A, B, C, D jsou čtyři navzájem různé body na projektivní přímce v $\mathbb{P}^n$, potom platí:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{c} &= \gamma_1 \overrightarrow{a} + \gamma_2 \overrightarrow{b} \\ \overrightarrow{d} &= \delta_1 \overrightarrow{a} + \delta_2 \overrightarrow{b}, \end{aligned}$$

a $(AB; CD) = \dfrac{\gamma_2 \delta_1}{\gamma_1 \delta_2}$. Buď f kolineární zobrazení indukované (prostým) lineárním zobrazením ϕ. Platí
$\varphi(\overrightarrow{c}) = \varphi(\gamma_1 \overrightarrow{a} + \gamma_2 \overrightarrow{b}) = \gamma_1 \varphi(\overrightarrow{a}) + \gamma_2 \varphi(\overrightarrow{b})$, a analogicky pro $\varphi(\overrightarrow{d})$.
Dvojpoměr bodů $(\langle \varphi(\overrightarrow{a}) \rangle, \langle \varphi(\overrightarrow{b}) \rangle; \langle \varphi(\overrightarrow{c}) \rangle, \langle \varphi(\overrightarrow{d}) \rangle)$ je taky $\dfrac{\gamma_2 \delta_1}{\gamma_1 \delta_2}$.

Kuželosečka jako rovnice v $\mathbb{R}^2$

Kuželosečka v eukleidovské rovině je množina bodů $X = [x, y]$ takových, že platí:

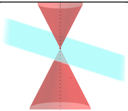
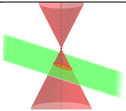
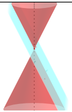
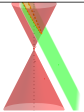
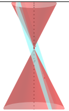
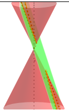
$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0, \text{ obyčejně pro } (a, b, c) \neq (0, 0, 0).$$

Přechod do homogenních souřadnic v $\mathbb{RP}^2$:
$x = \frac{x_1}{x_0}, y = \frac{x_2}{x_0}, x_0 \neq 0.$

$$a(\tfrac{x_1}{x_0})^2 + 2b\tfrac{x_1}{x_0}\tfrac{x_2}{x_0} + c(\tfrac{x_2}{x_0})^2 + 2d\tfrac{x_1}{x_0} + 2e\tfrac{x_2}{x_0} + f = 0$$
$$ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + 2dx_1x_0 + 2ex_2x_0 + fx_0^2 = 0$$

Kuželosečka jako řez kolmé kuželové plochy v $\mathbb{R}^3$

κ - kuželová plocha s osou o a vrcholem V, $\varphi \in (0, \frac{pi}{2})$ - odchylka površky kuželu od o, ρ - rovina, $\psi \in \langle 0, \frac{pi}{2} \rangle$ - $\sphericalangle(\rho, o)$

♡	singulární $V \in \rho$	regulární $V \notin \rho$
$\varphi < \psi$	 1 bod	 elipsa
$\varphi = \psi$	 přímka^2	 parabola
$\varphi > \psi$	 2 různoběžky	 hyperbola

Formy

Pro $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_0), \overrightarrow{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_0) \in \mathbf{V}^{n+1}$
Pozn. užíváme $n+1$ pro naše účely, lze samozřejmě následovné ekvivalentně zavést nad $\mathbf{V}^n$

Lineární forma (definice např. v Sekanina a kol: Geometrie I):
$f : \mathbf{V}^{n+1} \to \mathbb{T}; f(\overrightarrow{x}) = \mathbf{A}\overrightarrow{x} = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_0x_0$.
$f(\overrightarrow{x}) = 0$ je rovnice nadroviny.
Matice lin. f. je $\mathbf{A} = (a_1, a_2, \ldots, a_0)$.

Bilineární forma (definice např. v Sekanina a kol.: Geometrie II):
$f : \mathbf{V}^{n+1} \times \mathbf{V}^{n+1} \to \mathbb{T}; f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \overrightarrow{x}^T\mathbf{A}\overrightarrow{y}$.
Matice bilin. f. je $(n+1) \times (n+1)$.

Formy

Symetrická bilineární forma je bilineární forma f taková, že $f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = f(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{x})$.
Matice sym. bilin. formy je symetrická, např. pro $n = 2$ je:

$$\begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}.$$

$$f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = (x_1, x_2, x_0) \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Formy

Kvadratická forma:
$f_2 : \mathbf{V} \to \mathbb{T}$; $f_2(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x})$, kde f je symetrická bilineární forma, která ji určuje (indukuje), nazýváme ji *polární forma* k f_2.

$$f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = f_2(\overrightarrow{x}) = (x_1, x_2, x_0) \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_0 \end{pmatrix} =$$
$$ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + 2dx_1x_0 + 2ex_2x_0 + fx_0^2$$

Definice (Kvadrika)

Nechť je dána nenulová kvadratická forma f_2 na vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ dimenze $n+1$ nad tělesem $\mathbb{C}$. Množinu $\mathcal{Q}$ všech bodů $X = \langle \overrightarrow{x} \rangle \in \mathbb{CP}^n$, pro které platí $f_2(X) = 0$ nazýváme *kvadrika*. Pro $n = 2$ se kvadrika nazývá *kuželosečka*. *Maticí kvadriky* $\mathbf{A}$ nazýváme matici její kvadratické formy.

Kvadrika

Bod $X = (x_1, x_2, x_0)$ leží na kuželosečce $\mathcal{Q}$, když platí:

$$X^T\mathbf{A}X = (x_1, x_2, x_0)\begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_0 \end{pmatrix} = 0$$

Kvadrika

Bod $X = (x_1, x_2, x_3, x_0)$ leží na kvadrice $\mathcal{Q}$ když platí:

$$X^T\mathbf{A}X = (x_1, x_2, x_3, x_0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{20} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{30} \\ a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{00} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_0 \end{pmatrix} = 0$$

Vlastnosti kvadrik

Definice (Imaginární / reálná kvadrika)

Jestliže rovnici kvadriky nevyhovují reálné souřadnice žádného bodu, nazýváme ji *imaginární kvadrika (formálně reálná)*, v opačném případě ji nazýváme *bodově reálná*.

Definice (Hodnost a regulárnost kvadriky)

Hodnost matice kvadriky je *hodnost kvadriky*.
Je-li matice kvadriky regulární (singulární), potom nazýváme *kvadriku regulární (singulární)*.

Polarita

Definice

Body $P, Q \in \mathbb{CP}^n$ jsou *polárně sdružené (konjugované)* vzhledem ke kvadrice $\mathcal{Q}$ s maticí $\mathbf{A}$, jestliže platí $P^T \mathbf{A} Q = 0$

Věta

Je-li P polárně sdružený s 2 různými body U, V vzhledem ke kuželosečce $\mathcal{Q}$ s maticí $\mathbf{A}$, potom je polárně sdružený s každým bodem W přímky $\overleftrightarrow{UV}$.

Důkaz

$W = \alpha U + \beta V$
$P^T \mathbf{A} W = P^T \mathbf{A}(\alpha U + \beta V) = \alpha P^T \mathbf{A} U + \beta P^T \mathbf{A} V = 0$

Pozn. stejně taky pro rovinu v $\mathbb{CP}^3$.

Regulární a singulární body

Definice (Regulární a singulární body)

Bod P nazveme *singulární bod kvadriky* $\mathcal{Q}$, je-li polárně sdružen se všemi body prostoru $\mathbb{CP}^n$. Body kvadriky, které nejsou singulární, nazveme *regulární body kvadriky*.

Věta

Nechť $P \in \mathcal{Q}$ je singulární bod kvadriky $\mathcal{Q}$ a bod $Q \neq P$ leží na $\mathcal{Q}$, potom přímka $\overleftrightarrow{PQ}$ leží na kvadrice $\mathcal{Q}$.

Důkaz (Expresně)

$$(\alpha P+\beta Q)^T \mathbf{A}(\alpha P+\beta Q) = \alpha^2 P^T \mathbf{A} P + 2\alpha\beta P^T \mathbf{A} Q + \beta^2 Q^T \mathbf{A} Q = 0$$

Pól a polára

Definice (Pól a polára)

Nechť P není singulární bod kvadriky $\mathcal{Q}$, pak nadrovinu bodů v $\mathbb{CP}^n$ polárně sdružených s P nazýváme *polární nadrovinou pólu* P vzhledem ke kvadrice $\mathcal{Q}$.

v $\mathbb{CP}^2$: pól $\leftrightarrow$ polára
v $\mathbb{CP}^3$: pól $\leftrightarrow$ polární rovina

Polární nadrovina bodu P vzhledem ke $\mathcal{Q}$ s maticí **A** má obecnou rovnici:

$$P^T\mathbf{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_0 \end{pmatrix} = 0.$$

Pól a polára

Věta (Vzájemnost pólu a polární nadroviny)

Nechť různé body P, Q nejsou singulární body kvadriky $\mathcal{Q}$ s maticí $\mathbf{A}$. Leží-li bod Q v polární nadrovině bodu P, potom leží i bod P v polární nadrovině bodu Q vzhledem ke kvadrice $\mathcal{Q}$.

Důkaz

Polární nadrovina bodu P je množina bodů $X = (x_1, \dots, x_n, x_0)$, že $P^T\mathbf{A}X = 0 \Rightarrow P^T\mathbf{A}Q = 0$, ale $P^T\mathbf{A}Q = Q^T\mathbf{A}P$ ze symetrie $\mathbf{A}$.

Pól a polára

Definice (Tečná nadrovina)

Nechť T je regulární bod kvadriky $\mathcal{Q}$. Polární nadrovinu bodu T vzhledem ke kvadrice $\mathcal{Q}$ nazýváme *tečná nadrovina* a bod T její *bod dotyku*.

Věta

Tečné nadroviny vedené ke kvadrice $\mathcal{Q}$ z bodu $P \notin \mathcal{Q}$ se jí dotýkají v bodech, v nichž polární nadrovina bodu P vzhledem ke $\mathcal{Q}$ protíná kvadriku $\mathcal{Q}$.

Důkaz

Důsledek definice tečné nadroviny a věty o vzájemnosti pólu a polární nadroviny.

Matice kvadriky vzhledem k polární bázi

Je-li $\mathbf{A}$ matice kvadriky, lze ji převést pomocí symetrických řádkových a (analogických) sloupcových úprav na diagonální matici $\mathbf{A}'$. Matice $\mathbf{A}'$ se nazývá matice kvadriky vzhledem k *polární bázi*.

Příklad

$c: \; x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 8x_0x_2 - 4x_0^2 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \sim \left[2.\text{-}1.\check{r} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} 2.\text{-}1.s \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\left[2.\text{+}3.\check{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} 2.\text{+}3.s \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$c': \; x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_0^2 = 0$

Pozn. Konvence: matici upravujeme tak, aby na diagonále bylo vždy více kladných čísel. Resp. vynásobíme celou matici (-1).
POZOR: provádíme kolineace, které nezachovávají afinní vlastnosti, matici nemůžeme použít dále pro afinní klasifikaci. ☠

Signatura kvadratické formy

Definice

Je-li $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonální matice, pak trojici (n, p, q), kde n je počet nul, p je počet kladných čísel a q je počet záporných čísel na diagonále nazýváme *signaturou matice* $\mathbf{A}$.

Signaturou kvadratické formy nazýváme signaturu její matice vůči polární bázi.

Projektivní klasifikace kuželoseček

Typy kuželoseček v $\mathbb{CP}^2$
Kuželosečka $\mathcal{Q}: X^T\mathbf{A}X = 0$
$h(\mathbf{A})$ hodnost matice kuželosečky:

hodnost	signatura	$\mathbb{R}$ body	rovnice	projektivní typ v $\mathbb{CP}^2$
$h(\mathbf{A}) = 3$	$(0, 3, 0)$	$\emptyset$ $\mathbb{R}$ bodů	$x_1^2 + x_2^2 + x_0^2 = 0$	$\mathbb{I}$ regulární KS
$h(\mathbf{A}) = 3$	$(0, 2, 1)$	obsahuje $\mathbb{R}$ body	$x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0$	$\mathbb{R}$ regulární KS (el., par., hyp.)
$h(\mathbf{A}) = 2$	$(1, 2, 0)$	1 $\mathbb{R}$ bod	$x_1^2 + x_2^2 = 0$	2 $\mathbb{I}$ přímky
$h(\mathbf{A}) = 2$	$(1, 1, 1)$	obsahuje $\mathbb{R}$ body	$x_1^2 - x_2^2 = 0$	2 $\mathbb{R}$ přímky
$h(\mathbf{A}) = 1$	$(2, 1, 0)$	obsahuje $\mathbb{R}$ body	$x_1^2 = 0$	2-násobná $\mathbb{R}$ přímka

Projektivní klasifikace kvadrik

Typy kvadrik v $\mathbb{CP}^3$

hodnost	signatura	$\mathbb{R}$ body	rovnice	projektivní typ v $\mathbb{CP}^3$
$h(\mathbf{A}) = 4$	$(0, 4, 0)$	$\emptyset$ $\mathbb{R}$ bodů	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_0^2 = 0$	$\mathbb{I}$ regulární
$h(\mathbf{A}) = 4$	$(0, 3, 1)$	obsahuje $\mathbb{R}$ body	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2 = 0$	$\mathbb{R}$ regulární (nepřímková)
$h(\mathbf{A}) = 4$	$(0, 2, 2)$	obsahuje $\mathbb{R}$ body	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_0^2 = 0$	$\mathbb{R}$ regulární (přímková)
$h(\mathbf{A}) = 3$	$(1, 3, 0)$	1 $\mathbb{R}$ bod	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	$\mathbb{I}$ kuželová plocha
$h(\mathbf{A}) = 3$	$(1, 2, 1)$	obsahuje $\mathbb{R}$ body	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$	$\mathbb{R}$ kuželová plocha
$h(\mathbf{A}) = 2$	$(2, 2, 0)$	přímka $\mathbb{R}$ bodů	$x_1^2 + x_2^2 = 0$	2 $\mathbb{I}$ roviny
$h(\mathbf{A}) = 2$	$(2, 1, 1)$	obsahuje $\mathbb{R}$ body	$x_1^2 - x_2^2 = 0$	2 $\mathbb{R}$ roviny
$h(\mathbf{A}) = 1$	$(3, 1, 0)$	obsahuje $\mathbb{R}$ body	$x_1^2 = 0$	2-násobná $\mathbb{R}$ rovina

Afinní vlastnosti a klasifikace.

Kvadriky v projektivním rozšíření afinního prostoru $\overline{\mathbb{A}}_{\mathbb{C}}$ rozlišujeme podle počtu (resp. množin) nevlastních bodů (asymptotických směrů). Z afinních vlastností zjistíme u kuželoseček jejich asymptoty (tečny v nevlastních bodech), sdružené průměry (body polárně sdružené k nevlastním) a z nich střed (vlastní/ nevlastní) a středovost kuželosečky (středová/ nestředová).

Matice kuželosečky

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

označme $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} b & d \\ c & e \end{pmatrix}$ $\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \end{pmatrix}$ $\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

Sdružené směry, průměrové nadroviny

Definice (Průměrová nadrovina)

Nechť U_∞ je nevlastní bod (směr), který není bodem kvadriky $\mathcal{Q}$ v $\overline{\mathbb{A}}_{\mathbb{C}}$. Polární nadrovina bodu U_∞ vzhledem ke kvadrice $\mathcal{Q}$ se nazývá *průměrová nadrovina* kvadriky.
V $\overline{\mathbb{A}}^2_{\mathbb{C}}$ nazýváme průměrovou nadrovinu průměr.
Průměry, z nichž každý je sdružený se směrem druhého se nazývají *sdružené průměry*.

Asymptotické směry, asymptoty

Definice (Asymptotický směr)

Nevlastní bod kvadriky v $\overline{\mathbb{A}}_{\mathbb{C}}$ se nazývá *asymptotický směr* kvadriky.

T.j. hledáme všechny body kvadriky, pro které platí $x_0 = 0$. Dosazením do rovnice KS je to tedy množina nevlastních bodů splňující $ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 = 0$.
Obecně pro $x_1 \neq 0$ je $\langle(x_1, x_2, 0)\rangle = \langle(1, \frac{x_2}{x_1}, 0)\rangle$ a máme kvadratickou rovnici s koeficienty $a, 2b, c$ která má

- 2 reálné kořeny (nevlastní body) pro $b^2 - ac > 0$ reg: hyperbola , sing: 2 $\mathbb{I}, \mathbb{R}$ různoběžky.
- 1 dvojnásobný reálný kořen (nevlastní bod) pro $b^2 - ac = 0$ reg: parabola, sing: 2 $\mathbb{I}, \mathbb{R}$ rovnoběžky, 1 vlastní a 1 nevlastní přímka, 1 dvojnásobná přímka.
- žádný reálný kořen pro $b^2 - ac < 0$ reg: $\mathbb{I}, \mathbb{R}$ elipsa.

Z matice $b^2 - ac = -\det \mathbf{A_3}$

Definice (Asymptotická nadrovina)

Tečná nadrovina v nevlastním bodě kvadriky se nazývá *asymptotická nadrovina* kvadriky.
Tečna v nevlastním bodě $\rightarrow$ asymptota v $\overline{\mathbb{A}}^2_{\mathbb{C}}$.

T.j. polára asymptotického směru vzhledem ke KS je asymptota.

Střed

Definice (Střed)

Bod S nazýváme *středem kvadriky*, je-li polárně sdružen s každým nevlastním bodem prostoru $\overline{\mathbb{A}}_{\mathbb{C}}$ vzhledem ke kvadrice.

T.j. u KS v obecném případě volíme dva nevlastní body $I_\infty = (1,0,0), J_\infty = (0,1,0)$ a střed je průsečíkem jejich průměrů.

$$i : (1,0,0)\mathbf{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_0 \end{pmatrix} = ax_1 + bx_2 + dx_0 = 0; \quad j : (0,1,0)\mathbf{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_0 \end{pmatrix} = bx_1 + cx_2 + ex_0 = 0$$

Průsečík průměrů i, j je $(a,b,c) \times (b,c,e) = (\det \mathbf{A}_1, -\det \mathbf{A}_2, \det \mathbf{A}_3) = (s_1, s_2, s_0)$ - souřadnice středu S.

Střed

Definice (Středovost kvadriky)

Kvadrika, která má alespoň jeden vlastní střed se nazývá *středová, centrická*. V opačném případě se nazývá *nestředová*.

Několik důsledků přímo z definic:
Singulární bod KS je středem KS.
Průměry KS prochází středem KS.
Asymptoty KS prochází středem KS.

Středové kuželosečky jsou reg: $\mathbb{I}, \mathbb{R}$ elipsa, hyperbola a sing: 2 $\mathbb{I}, \mathbb{R}$ vlastní různoběžky.

Vedlejší signatura

Signaturu kvadratické formy vůči polární bázi dále nazýváme *hlavní signatura*.

Definice (Vedlejší signatura)

Signaturu matice kvadratické formy s vynechaným posledním řádkem a posledním sloupcem nazýváme *vedlejší signatura*.

Afinní klasifikace kuželoseček

hlavní sgn	vedlejší sgn	∞ body	rovnice	afinní typ v $\mathbb{CP}^2$
$(0,3,0)$	$(0,2,0)$	$\emptyset$	$x_1^2+x_2^2+x_0^2=0$	$\mathbb{I}$ elipsa
$(0,2,1)$	$(0,2,0)$	$\emptyset$	$x_1^2+x_2^2-x_0^2=0$	$\mathbb{R}$ elipsa
$(0,2,1)$	$(0,1,1)$	2	$x_1^2-x_2^2-x_0^2=0$	$\mathbb{R}$ hyperbola
$(0,2,1)$	$(1,1,0)$	1	$x_1^2+2x_0x_2=0$	$\mathbb{R}$ parabola
$(1,2,0)$	$(0,2,0)$	2	$x_1^2+x_2^2=0$	2 $\mathbb{I}$ různoběžky
$(1,2,0)$	$(1,1,0)$	1	$x_1^2+x_0^2=0$	2 $\mathbb{I}$ rovnoběžky
$(1,1,1)$	$(0,1,1)$	2	$x_1^2-x_2^2=0$	2 $\mathbb{R}$ různoběžky
$(1,1,1)$	$(1,1,0)$	1	$x_1^2-x_0^2=0$	2 $\mathbb{R}$ rovnoběžky
$(1,1,1)$	$(2,0,0)$	přímka	$x_0x_2=0$	vlastní $\mathbb{R}$ a nevlastní $\mathbb{R}$ přímka
$(2,1,0)$	$(1,1,0)$	1	$x_1^2=0$	2-násobná $\mathbb{R}$ přímka
$(2,1,0)$	$(2,0,0)$	přímka	$x_0^2=0$	2-násobná nevlastní $\mathbb{R}$ přímka

Afinní klasifikace kvadrik

hlavní sgn	vedlejší sgn	∞ body	rovnice	afinní typ v $\mathbb{CP}^3$
$(0,4,0)$	$(0,3,0)$	$\emptyset$	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_0^2 = 0$	$\mathbb{I}$ elipsoid
$(0,3,1)$	$(0,3,0)$	$\emptyset$	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2 = 0$	$\mathbb{R}$ elipsoid
$(0,3,1)$	$(0,2,1)$	reg. KS	$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_0^2 = 0$	$\mathbb{R}$ dvojdílný hyperboloid
$(0,3,1)$	$(1,2,0)$	1	$x_1^2 + x_2^2 + 2x_3x_0 = 0$	$\mathbb{R}$ eliptický paraboloid
$(0,2,2)$	$(0,2,1)$	reg. KS	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_0^2 = 0$	$\mathbb{R}$ jednodílný hyperboloid
$(0,2,2)$	$(1,1,1)$	2 různoběžky	$x_1^2 - x_2^2 + 2x_3x_0 = 0$	$\mathbb{R}$ hyperbolický paraboloid
$(1,3,0)$	$(0,3,0)$	reg. KS	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	$\mathbb{I}$ kuželová plocha
$(1,3,0)$	$(1,2,0)$	1	$x_1^2 + x_2^2 + x_0^2 = 0$	$\mathbb{I}$ válcová plocha
$(1,2,1)$	$(0,2,1)$	reg. KS	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$	$\mathbb{R}$ kuželová plocha
$(1,2,1)$	$(1,2,0)$	1	$x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0$	$\mathbb{R}$ eliptická válcová plocha
$(1,2,1)$	$(1,1,1)$	2 různoběžky	$x_1^2 - x_2^2 - x_0^2 = 0$	$\mathbb{R}$ hyperbolická válcová plocha
$(1,2,1)$	$(2,1,0)$	2-násobná přímka	$x_1^2 + 2x_2x_0 = 0$	$\mathbb{R}$ parabolická válcová plocha
...				

Afinní klasifikace kvadrik

hlavní sgn	vedlejší sgn	∞ body	rovnice	afinní typ v $\mathbb{CP}^3$
...				
(2, 2, 0)	(1, 2, 0)	2 různoběžky	$x_1^2 + x_2^2 = 0$	2 $\mathbb{I}$ různoběžné roviny
(2, 2, 0)	(2, 1, 0)	2-násobná přímka	$x_1^2 + x_0^2 = 0$	2 $\mathbb{I}$ rovnoběžné roviny
(2, 1, 1)	(1, 1, 1)	2 různoběžky	$x_1^2 - x_2^2 = 0$	2 $\mathbb{R}$ různoběžné roviny
(2, 1, 1)	(2, 1, 0)	2-násobná přímka	$x_1^2 - x_0^2 = 0$	2 $\mathbb{R}$ rovnoběžné roviny
(2, 1, 1)	(3, 0, 0)	rovina body	$x_1 x_0 = 0$	vlastní $\mathbb{R}$ a nevlastní $\mathbb{R}$ rovina
(3, 1, 0)	(2, 1, 0)	přímka	$x_1^2 = 0$	2-násobná $\mathbb{R}$ rovina
(3, 1, 0)	(3, 0, 0)	rovina	$x_0^2 = 0$	2-násobná nevlastní $\mathbb{R}$ rovina

Metrické vlastnosti kuželoseček

Kuželosečky v projektivním rozšíření komplexního prostoru $\mathbb{CP}^n$ rozlišujeme podle metrických vlastností, t.j. hlavní směry (směry sdružené s kolmými) a jejich poláry - osy souměrnosti. Průsečíky os souměrnosti a kuželosečky jsou vrcholy.

Hlavní směry

Definice (Hlavní směry)

Směr určený vektorem $\overrightarrow{o} \neq \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^2$ nazýváme *hlavním směrem* kuželosečky c, je-li polárně sdružen s vzájemně kolmým směrem vzhledem ke kuželosečce c.

Věta

Ke každé kuželosečce existují alespoň dva na sebe kolmé hlavní směry. Jsou to vlastní vektory matice $\mathbf{A}_3$ *(z předešlého značení).*

Hlavní směry

Věta

Ke každé kuželosečce existují alespoň dva na sebe kolmé hlavní směry. Jsou to vlastní vektory matice $\mathbf{A}_3$ *(z předešlého značení).*

$$\vec{u}^T \mathbf{A} \vec{v} = (u_1, u_2, 0) \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} = (u_1, u_2) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$0 = \vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 = (u_1, u_2) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \vec{u}^T \lambda \mathbf{E} \vec{v}$$

$$\vec{u}^T (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \vec{v} = 0$$

Je-li vlastní číslo 2-násobné - matice má nekonečně mnoho vlastních vektorů. Vybíráme dva ne sebe kolmé. (např. kružnice)

Je-li vlastní číslo 0 - pak je kuželosečka nestředová (střed je nevlastní). (např. parabola)

Osy

Definice (Osy)

Je-li U_∞ nevlastní nesingulární bod určený hlavním směrem kuželosečky c, potom poláru bodu U_∞ vzhledem k c, pokuď je to vlastní přímka, nazýváme *osou kuželosečky*.
Pozn. Je-li hlavní směr kuželosečky nevlastním singulárním bodem kuželosečky, pak definujeme jako osu kuželosečky libovolnou vlastní přímku, která je kolmá na tento směr.

Pro regulární: elipsa a hyperbola mají 2 osy, parabola má jednu osu souměrnosti.
Pro pozn.: např. 2 rovnoběžky.

Vrcholy

Definice (Vrchol)

Vlastní průsečík kuželosečky s její osou se nazývá *vrchol kuželosečky*.

Elipsa má 4 vrcholy (hlavní a vedlejší), hyperbola má 2 reálné vrcholy, parabola má 1 reálný vrchol.
Kružnice má ∞ vrcholů.

Ohniska

Definice (Ohniska)

Nechť je daný bod M na regulární kuželosečce. Pak body F_1 a F_2 nazýváme *ohniska*

- elipsy, pokud platí $|F_1M| + |F_2M| = 2a$ a současně $|F_1F_2| < 2a$, kde a je délka hlavní poloosy.
- hyperboly, pokud platí $||F_1M| - |F_2M|| = 2a$ a současně $|F_1F_2| > 2a$, kde a je délka hlavní poloosy.
- paraboly, pokud platí $|F_1M| = |dM|$, kde d je řídicí přímka paraboly.

Spojnice F_1M, F_2M, resp. přímku rovnoběžnou s osou procházející bodem M u paraboly nazýváme *průvodiče bodu kuželosečky*.
Vzdálenost ohnisek od středu kuželosečky nazýváme excentricita e (výstřednost) kuželosečky.

Ohniska

Ohniska je možné dohledat např. pomocí vztahů:

- elipsa: $e^2 = a^2 - b^2$.
- hyperbola: $e^2 = a^2 + b^2$

nebo z vlastnosti, že tečna půlí úhel průvodičů.

Křivka

Definice (Křivka)

Křivka je

- trajektorie spojitého pohybu bodu.
- obraz spojitého zobrazení intervalu do prostoru.
- množina bodů dána jako průnik ploch.

Typy křivek

Křivky dělíme na:

- rovinné
- prostorové

- empirické
- analytické (matematické)
  - algebraické (polynomy)
  - transcendentní
  - ...

Popis křivek

Křivky popisujeme:

- explicitně v rovině: $y = f(x), x \in I \subset \mathbb{R}$
- implicitně v rovině: $F(x, y) = 0, [x, y] \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$
- parametricky
    - v rovině: $c(t) = (x(t), y(t)), t \in I \subset \mathbb{R}$
    - v prostoru: $c(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in I \subset \mathbb{R}$

Explicitně zadanou křivku $y = f(x)$ lze vždy přepsat na implicitní tvar $F(x, y) = y - f(x) = 0$. Obráceně to neplatí.

Regulární a singulární body

Definice (Regulární a singulární body)

Bod $P = c(t_0), t_0 \in I$ nazveme *singulární bod křivky* $c(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in I$, když platí $c'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) = (0, 0, 0)$.

Body křivky, které nejsou singulární, nazveme *regulární body křivky*.

Tečna a normála křivky

Definice (Tečný vektor a tečna křivky)

Nechť je dána křivka $c(t), t \in I$ a její regulární bod $P = c(t_0), t_0 \in I$. Vektor $c'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ nazýváme *směrový vektor tečny (tečný vektor) v bodě P*. Přímku $p(u) = P + u \cdot c'(t_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0)) + u \cdot (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)), u \in \mathbb{R}$ nazýváme *tečna křivky $c(t)$ v bodě P.*

Definice

Přímku, resp. rovinu kolmou k tečně v bodě $P = c(t_0)$ ke křivce $c(t)$, procházející bodem P nazýváme *normála křivky $c(t)$ v bodě P*.

Plocha

Definice (Plocha)

Plocha je

- trajektorie spojitého pohybu tvořící křivky.
- obraz spojitého zobrazení oblasti do prostoru.

Typy ploch

Plochy dělíme na:

- empirické
- analytické (matematické)

  Podle algebraických vlastností
  - algebraické (polynomy)
  - transcendentní
  - ...

  Podle druhu tvořící křivky
  - přímkové
  - cyklické
  - ...

  Podle druhu pohybu
  - rotační
  - šroubové
  - translační
  - ...

Popis ploch

Plochy popisujeme:

- explicitně: $z = f(x, y), [x, y] \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$
- implicitně: $F(x, y, z) = 0, [x, y, z] \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$
- parametricky v prostoru:
  $s(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), [u, v] \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$

Explicitně zadanou plochu $z = f(x, y)$ lze vždy přepsat na implicitní tvar $F(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$. Obráceně to neplatí.