

Geometrie — projektivní prostory

Michal Zamboj

Pedagogická fakulta

ZS 2020/2021

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~zamboj/>

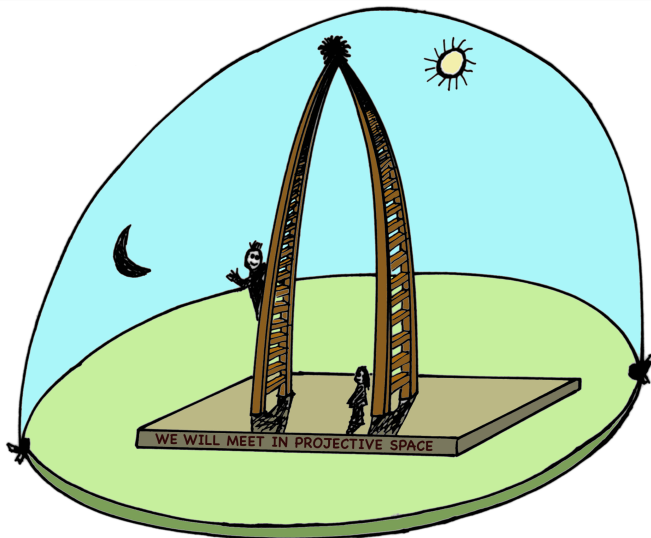
Projektivní rozšíření eukleidovského prostoru \mathbb{RP}^3

Ke každé přímce $p \in \mathbb{R}^3$ přidáme jeden bod P_∞ , který je společný pro všechny rovnoběžky s p (směr). Bod P_∞ nazýváme *nevlastním bodem* přímky p .

Ke každé rovině $\rho \in \mathbb{R}^3$ přidáme jednu přímku p_∞ , která je společná pro všechny roviny rovnoběžné s ρ . Přímku p_∞ nazýváme *nevlastní přímkou* roviny ρ .

K prostoru \mathbb{R}^3 přidáme rovinu ρ_∞ , která je množinou všech nevlastních bodů a přímek prostoru \mathbb{R}^3 . Rovinu ρ_∞ nazýváme *nevlastní rovinou* prostoru \mathbb{R}^3 .

Projektivní rozšíření eukleidovského prostoru \mathbb{RP}^3



Projektivní rozšíření eukleidovského prostoru \mathbb{RP}^3

Definice (\mathbb{RP}^3)

Eukleidovský prostor \mathbb{R}^3 doplněný o nevlastní rovinu ρ_∞ nazýváme *projektivně rozšířený eukleidovský prostor*.
Zn. \mathbb{RP}^3 .

Definice (\mathbb{RP}^2)

Eukleidovskou rovinu \mathbb{R}^2 doplněnou o nevlastní přímku p_∞ nazýváme *projektivně rozšířená eukleidovská rovina*.
Zn. \mathbb{RP}^2 .

Princip duality

Každá věta geometrie roviny \mathbb{RP}^2 přechází v rovněž platnou *duální* větu geometrie roviny \mathbb{RP}^2 , nahradíme-li v ní pojem bod pojmem přímka a naopak (případně jejich odvozenými pojmy ako průsečík, spojnice ...).

- I1 Libovolnými dvěma různými body prochází právě jedna přímka.
- I1* Libovolné dvě různé přímky se protínají v právě jednom bodě.

Princip duality

V \mathbb{RP}^3 zaměňujeme pojem bod s pojmem rovina.

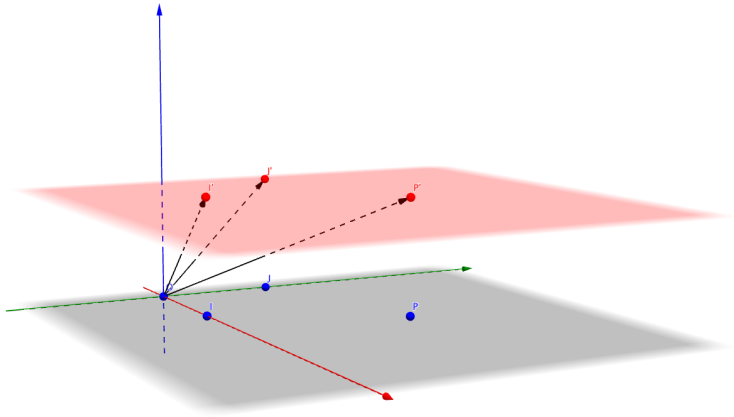
- 1 Pro každé tři nekolinární body A, B, C existuje právě jedna rovina ρ , která je s nimi incidentní.
- 1* Pro každé tři roviny α, β, γ neprocházející jednou přímkou existuje právě jeden bod P , který je s nimi incidentní.
- 11* Libovolné dvě různé roviny se protínají v právě jedné přímce.

Homogenní souřadnice - Motivace

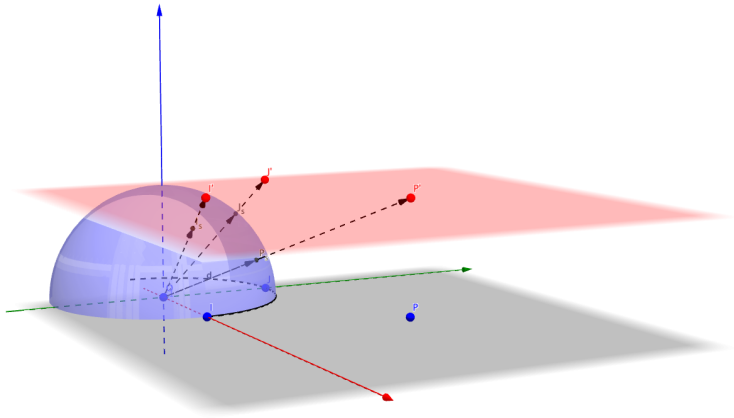
$X' = \mathbf{A}X + \vec{p}$ — nelíbí se nám, chtěli bychom jednu matici včetně posunutí

$ax + by + c = 0$ — rovnice přímky procházející daným bodem se dá napsat jednodušeji

Homogenní souřadnice - Motivace



Homogenní souřadnice - Motivace



Homogenní souřadnice v \mathbb{RP}^2

Uspořádanou trojici $(x_1, x_2, x_0) \neq (0, 0, 0)$ nazýváme *homogenními souřadnicemi* bodu $X' \in \mathbb{RP}^2$.

Pozn. Někde taky (x_0, x_1, x_2) .

Homogenní souřadnice jsou nezávislé na nenulovém násobku.

T.j. $(x_1, x_2, x_0) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_0)$ pro $\lambda \neq 0$.

Homogenní souřadnice určují bod X' jednoznačně.

Vlastní body:

Bodu $X = [x, y] \in \mathbb{R}^2$ odpovídá bod $X' = (x_1, x_2, x_0) \in \mathbb{RP}^2$, kde $x_0 \neq 0$.

Souřadnice bodu $X' = (x_1, x_2, x_0) = \left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, 1\right)$, t.j.

$$x = \frac{x_1}{x_0}, y = \frac{x_2}{x_0}.$$

Pro $\lambda \neq 0$ platí $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_0) = (x_1, x_2, x_0)$.

X' nazýváme *vlastní bod* v \mathbb{RP}^2 pro $x_0 \neq 0$.

Homogenní souřadnice v \mathbb{RP}^2

Nevlastní body:

Nechť $X = [\kappa x, \kappa y] \in \mathbb{R}^2$, kterému odpovídá
 $X' = (\kappa x, \kappa y, 1) \in \mathbb{RP}^2$.

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} (x, y, \frac{1}{\kappa}) = (x, y, 0)$$

Směru $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ odpovídá **bod** $X'_\infty = (x, y, 0) \in \mathbb{RP}^2$.
 X' nazýváme *nevlastní bod* v \mathbb{RP}^2 pro $x_0 = 0$.

Homogenní souřadnice v \mathbb{RP}^2

Uspořádanou trojici $\vec{u} = (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ nazýváme *homogenními souřadnicemi* přímky $p' \in \mathbb{RP}^2$.

Vlastní přímky:

Nechť je přímka v \mathbb{R}^2 dána obecnou rovnicí $p : ax + by + c = 0$.

V homogenních souřadnicích v \mathbb{RP}^2 máme

$$p' : a \frac{x_1}{x_0} + b \frac{x_2}{x_0} + c = 0, \text{ pro } x_0 \neq 0, \text{ t.j.}$$

$$p' : ax_1 + bx_2 + cx_0 = 0 = (a, b, c) \cdot (x_1, x_2, x_0) = \vec{u} \cdot X'$$

pro $x_0 = 0$ dostáváme jako řešení souřadnice nevlastního bodu $(-b, a, 0)$

Nevlastní přímka:

Přímka procházející nevlastními body např.

$$I_\infty = (1, 0, 0), J_\infty = (0, 1, 0).$$

$$p_\infty : (a, b, c) = I_\infty \times J_\infty = (0, 0, 1), \text{ t.j. obecná rovnice } x_0 = 0.$$

Homogenní souřadnice v \mathbb{RP}^3

Uspořádanou čtveřici $(x_1, x_2, x_3, x_0) \neq (0, 0, 0, 0)$ nazýváme *homogenními souřadnicemi* bodu $X' \in \mathbb{RP}^3$.

Pro $\lambda \neq 0$ platí $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_0) = (x_1, x_2, x_3, x_0)$.

Vlastní body:

Pro $x_0 \neq 0$ odpovídá bodu $X = [\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \frac{x_3}{x_0}] \in \mathbb{R}^3$ vlastní bod $X' = (x_1, x_2, x_3, x_0) \in \mathbb{RP}^3$.

Nevlastní body:

Pro $x_0 = 0$ odpovídá směru $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ nevlastní bod $X'_\infty = (x, y, z, 0) \in \mathbb{RP}^3$.

Homogenní souřadnice v \mathbb{RP}^3

Uspořádanou čtveřici $\vec{u} = (a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0)$ nazýváme *homogenními souřadnicemi roviny* $\rho' \in \mathbb{RP}^3$.

Obecná rovnice roviny $\rho \in \mathbb{RP}^3$ je $\rho : ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_0 = 0$.
Nevlastní rovina má rovnici $x_0 = 0$.

Projektivní prostor \mathbb{P}^n

Definice (Projektivní prostor)

Nechť \mathbf{V}_{n+1} je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{T}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ dimenze $n + 1$; $n \geq 0$. Nechť \sim je relace ekvivalence $\mathbf{V}_{n+1} \setminus \{\vec{0}\}$ definována následovně: pro

$$\vec{u}, \vec{v} \in \mathbf{V}_{n+1}, \vec{u} \sim \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} = \lambda \vec{v}; 0 \neq \lambda \in \mathbb{T}.$$

Projektivní prostor dimenze n je množina tříd ekvivalence

$$\mathbb{P}^n(\mathbf{V}_{n+1}) = (\mathbf{V}_{n+1} \setminus \{\vec{0}\}) / \sim.$$

Dále značíme jenom \mathbb{P}^n .

Prvky (body) projektivního prostoru \mathbb{P}^n jsou jednodimenzionální podprostory \mathbf{V}_{n+1} :

$$X = \langle \vec{v} \rangle = \{ \vec{u} \in \mathbf{V}_{n+1}; \vec{u} = \lambda \vec{v}; \lambda \neq 0; \lambda \in \mathbb{R} \}.$$

\mathbb{P}^2 ... projektivní rovina

$X \in \mathbb{P}^2$ je geometrický bod v projektivní rovině

$\vec{v} \in \mathbf{V}^3$ takový, že $\langle \vec{v} \rangle = X$ je aritmetický zástupce bodu X .

Pozn. Každý bod $X \in \mathbb{P}^n$ má nekonečně mnoho aritmetických zástupců.

Projektivní prostor \mathbb{P}^n

Definice (LZ a LNZ body)

Body $A_1 = \langle \vec{a}_1 \rangle, \dots, A_k = \langle \vec{a}_k \rangle$ nazveme *lineárně závislé (nezávislé)*, když jsou lineárně závislé (nezávislé) vektory $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$.

Definice (LK bodů)

Bod $A = \langle \vec{a} \rangle$ je *lineární kombinací* bodů A_1, \dots, A_k , jestliže vektor \vec{a} je lineární kombinací vektorů $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$.

Zn. $A = \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_k A_k$.

Projektivní prostor \mathbb{P}^n

Definice (Projektivní systém souřadnic a aritmetická báze)

Projektivním systémem souřadnic (projektivním repérem, geometrickou bází) prostoru $\mathbb{P}^n(\mathbf{V}_{n+1})$ rozumíme libovolnou uspořádanou $(n+2)$ -tici bodů $(E_1, \dots, E_n, E_0; J)$ z \mathbb{P}^n takových, že libovolných $(n+1)$ z nich je lineárně nezávislých.

Uspořádanou $(n+1)$ -tici vektorů $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n, \vec{e}_0)$ nazýváme *aritmetickou bází* vzhledem k projektivnímu systému souřadnic $(E_1, \dots, E_n, E_0; J)$ právě tehdy když \vec{e}_i je aritmetickým zástupcem bodu E_i a *jednotkový bod* J má aritmetického zástupce $\sum_{i=0}^n \vec{e}_i$.

E_0, \dots, E_n - základní body

J - jednotkový bod

Projektivní prostor \mathbb{P}^n

Definice (Projektivní homogenní souřadnice)

$(n + 1)$ -tici $(x_1, \dots, x_n, x_0) \in \mathbf{V}n + 1$ přiřazenou každému bodu $X \in \mathbb{P}^n$ nazýváme *projektivní homogenní souřadnice bodu X* vzhledem k projektivnímu systému souřadnic $(E_1, \dots, E_n, E_0; J)$ právě tehdy když existuje aritmetická báze $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n, \vec{e}_0)$ vzhledem k $(E_1, \dots, E_n, E_0; J)$, pro kterou platí
$$X = x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n + x_0 \vec{e}_0.$$

Projektivní podprostory

Definice (Projektivní podprostor)

Množina všech bodů v \mathbb{P}^n , které jsou lineární kombinací $k + 1$ lineárně nezávislých bodů X_0, X_1, \dots, X_k se nazývá *k-rozměrný projektivní podprostor* $\mathbb{P}^k \subset \mathbb{P}^n$.

$k = 0 \dots$ projektivní bod

$k = 1 \dots$ projektivní přímka

$k = 2 \dots$ projektivní rovina

$k = n - 1 \dots$ projektivní nadrovina

$k = -1 \dots$ prázdná množina

Projektivní podprostory

Parametrické vyjádření podprostoru $\mathbb{P}^k \subset \mathbb{P}^n$, určeného $(k + 1)$ lineárně nezávislými body X_0, \dots, X_k :

$$X = \sum_{i=0}^k t_i X_i; \quad t_i \in \mathbb{R}, (t_0, t_1, \dots, t_k) \neq (0, 0, \dots, 0)$$

Obecná rovnice nadroviny \mathbb{P}^n :

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n + a_0 x_0 = 0, \\ \text{pro } (a_0, a_1, \dots, a_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$$

Přechod od \mathbb{P}^n k \mathbb{A}^n

Buď \mathbb{P}^n projektivní prostor a \mathbf{V}_{n+1} jeho (aritmetický) vektorový základ. Volíme nadrovinu ω_0 s vektorovým základem $\mathbf{W}_n \subset \mathbf{V}_{n+1}$. V \mathbb{P}^n volíme geometrickou bázi $(E_0, E_1, \dots, E_n; J)$ tak, že $E_1, \dots, E_n \in \omega_0$ a $E_0, J \notin \omega_0$.
t.j. rovnice $\omega_0 : x_0 = 0$.

Nechť $\mathbf{A} = \mathbb{P}^n \setminus \omega_0 = \{ \langle (x_1, \dots, x_n, x_0) \rangle \in \mathbb{P}^n; x_0 \neq 0 \}$.

$X, Y \in \mathbf{A}$:

$$X = \langle \vec{X} \rangle; \vec{X} = \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}, 1 \right); \vec{X} = \frac{x_1}{x_0} \vec{e}_1 + \dots + \frac{x_n}{x_0} \vec{e}_n + \vec{e}_0$$

$$Y = \langle \vec{Y} \rangle; \vec{Y} = \left(\frac{y_1}{y_0}, \dots, \frac{y_n}{y_0}, 1 \right); \vec{Y} = \frac{y_1}{y_0} \vec{e}_1 + \dots + \frac{y_n}{y_0} \vec{e}_n + \vec{e}_0$$

Nechť f je zobrazení: $\mathbf{A} \times \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{W}_n$

$$f(X, Y) = \overrightarrow{XY} = (Y - X) = \left(\frac{y_1}{y_0} - \frac{x_1}{x_0} \right) \vec{e}_1 + \dots + \left(\frac{y_n}{y_0} - \frac{x_n}{x_0} \right) \vec{e}_n.$$

Pak trojice $(\mathbf{A}, \mathbf{W}_n, f)$ je afinní prostor \mathbb{A}^n s repérem $(E_0; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$.
Obráceně umíme vytvořit *projektivně rozšířený afinní prostor*.

Projektivní zobrazení

Definice (Projektivní (kolineární) zobrazení)

Nechť $\mathbb{P}^n(\mathbf{V}_{n+1})$, $\mathbb{P}^m(\mathbf{V}'_{m+1})$ jsou dva projektivní prostory a nechť zobrazení $\varphi : \mathbf{V}_{n+1} \rightarrow \mathbf{V}'_{m+1}$ je lineární zobrazení. Pak zobrazení $f : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^m$ definované předpisem $f(\langle \vec{u} \rangle) = \langle \varphi(\vec{u}) \rangle$ se nazývá *projektivní (kolineární) zobrazení*.

Definice (Kolineace)

Kolineace je vzájemně jednoznačné kolineární zobrazení.

Pozn. Kolineární zobrazení zobrazuje kolineární body X, Y, Z na kolineární body X', Y', Z' nebo do jednoho bodu $X' = Y' = Z'$.

Analytické vyjádření kolineárního zobrazení

$f : X \rightarrow X'$ indukováno $\varphi : \vec{X} \rightarrow \vec{X}'$

$\mathbf{A}_{(m+1, n+1)}$ je matice lineárního zobrazení φ .

$$\vec{X}' = \mathbf{A} \vec{X} = \varphi(\vec{X})$$

$$f(\langle \vec{X} \rangle) = \langle \varphi(\vec{X}) \rangle = \langle \mathbf{A} \vec{X} \rangle = \langle \vec{X}' \rangle$$

$$\text{resp. } f(X) = \quad = \mathbf{A}X = X'$$

Kolineární zobrazení je určeno až na násobek, t.j. třídou matic

$$\tilde{\mathbf{A}} = \{\rho \mathbf{A}; \rho \in \mathbb{R}; \rho \neq 0 \text{ a platí } \varphi(\vec{X}) = \mathbf{A} \vec{X}\}.$$

Matice kolineace v projektivní rovině \mathbb{P}^2 je: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

\mathbf{A} je regulární čtvercová matice, t.j. $(\det \mathbf{A} \neq 0)$.

Samodružné body

Samodružný bod kolineace

$$f : f(\langle \vec{x} \rangle) = \langle \vec{x} \rangle$$

$$\langle \vec{x} \rangle = \langle \mathbf{A} \vec{x} \rangle$$

$$\lambda \vec{x} = \mathbf{A} \vec{x}, \lambda \neq 0$$

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \vec{x} = 0$$

$$f(X) = X$$

$$X = \mathbf{A}X$$

$$\lambda X = \mathbf{A}X$$

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})X = 0$$

Středová kolineace

Definice (Středová (osová) kolineace v rovině)

Středová (osová) kolineace je kolineace, která má přímku o samodružných bodů a nazýváme ji *osou kolineace* a samodružný bod $S \notin o$, který nazýváme *střed kolineace*. Body a jejich obrazy leží na přímkách procházejících středem S .

Středová kolineace je určena osou o , středem S a párem odpovídajících si bodů $A \rightarrow A'$.

Dvojpoměr

Definice (Dvojpoměr)

Nechť A, B, C, D jsou čtyři různé body na projektivní přímce a platí:

$$\begin{aligned}C &= \gamma_1 A + \gamma_2 B \\ D &= \delta_1 A + \delta_2 B,\end{aligned}$$

potom číslo $(AB; CD) = \frac{\gamma_2 \delta_1}{\gamma_1 \delta_2}$ nazýváme dvojpoměr uspořádané čtveřice bodů A, B, C, D .

Pozn.: Bodu X můžeme přiřadit (projektivní) souřadnice přímky $X = \xi_1 A + \xi_2 B$.

Dvojpoměr

Volíme souřadnice bodů

$$A = (1, 0); B = (0, 1); C = (\gamma_1, \gamma_2); D = (\delta_1, \delta_2).$$

Dvojpoměr $(AB; CD)$ můžeme spočítat taky následovně:

$$(AB; CD) = \frac{\det(AC) \det(BD)}{\det(BC) \det(AD)} = \frac{\gamma_2 \delta_1}{\gamma_1 \delta_2}$$

Středová kolineace zachovává dvojpoměr (synteticky v \mathbb{R}^2)

Věta (Dvojpoměr bodů a přímek)

Nechť jsou dány čtyři různé body A, B, C, D na přímce p a bod O , který na ní neleží. Označme $\overline{AO} = a$ a podobně b, c, d . Pak platí:

$$(AB; CD) = \frac{\sin(a, c)}{\sin(b, c)} \cdot \frac{\sin(a, d)}{\sin(b, d)}.$$

$\sin(a, c)$ je sinus orientovaného úhlu $\sphericalangle(a, c)$.

Středová kolineace zachovává dvojpoměr (synteticky v \mathbb{R}^2)

Věta (Středová kolineace zachovává dvojpoměr)

Nechť jsou dány přímky p, p' a bod O , který neleží na žádné z nich. Promítneme-li čtyři různé body A, B, C, D přímky p z bodu O na přímku p' do bodů A', B', C', D' , potom platí $(AB; CD) = (A'B'; C'D')$.

Kolineární zobrazení zachovává dvojpoměr

Věta (Kolineární zobrazení zachovává dvojpoměr)

Kolineární zobrazení čtyř různých bodů na čtyři různé body zachovává dvojpoměr.

Důkaz

Nechť A, B, C, D jsou čtyři navzájem různé body na projektivní přímce v \mathbb{P}^n , potom platí:

$$\begin{aligned}\vec{c} &= \gamma_1 \vec{a} + \gamma_2 \vec{b} \\ \vec{d} &= \delta_1 \vec{a} + \delta_2 \vec{b},\end{aligned}$$

$a(AB; CD) = \frac{\gamma_2 \delta_1}{\gamma_1 \delta_2}$. Bud' f kolineární zobrazení indukované (prostým) lineárním zobrazením ϕ . Platí

$\varphi(\vec{c}) = \varphi(\gamma_1 \vec{a} + \gamma_2 \vec{b}) = \gamma_1 \varphi(\vec{a}) + \gamma_2 \varphi(\vec{b})$, a analogicky pro $\varphi(\vec{d})$.

Dvojpoměr bodů $(\langle \varphi(\vec{a}) \rangle, \langle \varphi(\vec{b}) \rangle; \langle \varphi(\vec{c}) \rangle, \langle \varphi(\vec{d}) \rangle)$ je taky $\frac{\gamma_2 \delta_1}{\gamma_1 \delta_2}$.

Kuželosečka jako rovnice v \mathbb{R}^2

Kuželosečka v eukleidovské rovině je množina bodů $X = [x, y]$ takových, že platí:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0, \text{ obvyčejně pro } (a, b, c) \neq (0, 0, 0).$$

Přechod do homogenních souřadnic v \mathbb{RP}^2 :







$$x = \frac{x_1}{x_0}, y = \frac{x_2}{x_0}, x_0 \neq 0.$$

$$a\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2 + 2b\frac{x_1}{x_0}\frac{x_2}{x_0} + c\left(\frac{x_2}{x_0}\right)^2 + 2d\frac{x_1}{x_0} + 2e\frac{x_2}{x_0} + f = 0$$

$$ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + 2dx_1x_0 + 2ex_2x_0 + fx_0^2 = 0$$

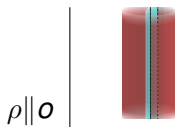
Kuželosečka jako řez kolmé kuželové plochy v \mathbb{R}^3

κ — kuželová plocha s osou o a vrcholem V , $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ — odchylka povrchy kuželu od o , ρ — rovina, $\psi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ — úhel $\sphericalangle(\rho, o)$

♡	singulární $V \in \rho$	regulární $V \notin \rho$
$\varphi < \psi$	 1 bod	 elipsa
$\varphi = \psi$	 přímka ²	 parabola
$\varphi > \psi$	 2 různoběžky	 hyperbola

Kuželosečka jako řez kolmé kuželové a válcové plochy v \mathbb{R}^3

Další možnosti pro: κ — válcová plocha s osou o , ρ — rovina



rovnoběžky



prázdná mn.

Formy

Pro $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_0)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_0) \in \mathbf{V}^{n+1}$

Pozn. užíváme $n + 1$ pro naše účely, lze samozřejmě následovně ekvivalentně zavést nad \mathbf{V}^n

Lineární forma (definice např. v Sekanina a kol: Geometrie I):

$$f : \mathbf{V}^{n+1} \rightarrow \mathbb{T}; f(\vec{x}) = \mathbf{A}\vec{x} = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_0x_0.$$

$f(\vec{x}) = 0$ je rovnice nadroviny.

Matice lin. f. je $\mathbf{A} = (a_1, a_2, \dots, a_0)$.

Bilineární forma (definice např. v Sekanina a kol.: Geometrie II):

$$f : \mathbf{V}^{n+1} \times \mathbf{V}^{n+1} \rightarrow \mathbb{T}; f(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}^T \mathbf{A} \vec{y}.$$

Matice bilin. f. je $(n + 1) \times (n + 1)$.

Formy

Symetrická bilineární forma je bilineární forma f taková, že $f(\vec{x}, \vec{y}) = f(\vec{y}, \vec{x})$.

Matice sym. bilin. formy je symetrická, např. pro $n = 2$ je:

$$\begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}.$$

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1, x_2, x_0) \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Formy

Kvadratická forma:

$f_2 : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{T}; f_2(\vec{X}) = f(\vec{X}, \vec{X})$, kde f je symetrická bilineární forma, která ji určuje (indukuje), nazýváme ji *polární forma* k f_2 .

$$f(\vec{X}, \vec{X}) = f_2(X) = (x_1, x_2, x_0) \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_0 \end{pmatrix} = \\ ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + 2dx_1x_0 + 2ex_2x_0 + fx_0^2$$

Definice (Kvadrika)

Nechť je dána nenulová kvadratická forma f_2 na vektorovém prostoru \mathbf{V} dimenze $n + 1$ nad tělesem \mathbb{C} . Množinu \mathcal{Q} všech bodů $X = \langle \vec{X} \rangle \in \mathbb{CP}^n$, pro které platí $f_2(X) = 0$ nazýváme *kvadrika*. Pro $n = 2$ se kvadrika nazývá *kuželosečka*. Maticí *kvadriky* \mathbf{A} nazýváme matici její kvadratické formy.

Kvadrika

Bod $X = (x_1, x_2, x_0)$ leží na kuželosečce Q , když platí:

$$X^T \mathbf{A} X = (x_1, x_2, x_0) \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_0 \end{pmatrix} = 0$$

Kvadrika

Bod $X = (x_1, x_2, x_3, x_0)$ leží na kvadrice \mathcal{Q} když platí:

$$X^T \mathbf{A} X = (x_1, x_2, x_3, x_0) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{20} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{30} \\ a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{00} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_0 \end{pmatrix} = 0$$

Vlastnosti kvadrik

Definice (Imaginární / reálná kvadrika)

Jestliže rovnici kvadriky nevyhovují reálné souřadnice žádného bodu, nazýváme ji *imaginární kvadrika (formálně reálná)*, v opačném případě ji nazýváme *bodově reálná*.

Definice (Hodnota a regulárnost kvadriky)

Hodnota matice kvadriky je *hodnota kvadriky*.

Je-li matice kvadriky regulární (singulární), potom nazýváme *kvadriku regulární (singulární)*.

Polarita

Definice

Body $P, Q \in \mathbb{C}P^n$ jsou *polárně sdružené (konjugované)* vzhledem ke kvadrice Q s maticí \mathbf{A} , jestliže platí $P^T \mathbf{A} Q = 0$

Věta

Je-li P polárně sdružený s 2 různými body U, V vzhledem ke kuželosečce Q s maticí \mathbf{A} , potom je polárně sdružený s každým bodem W přímky \overleftrightarrow{UV} .

Důkaz

$$W = \alpha U + \beta V$$

$$P^T \mathbf{A} W = P^T \mathbf{A} (\alpha U + \beta V) = \alpha P^T \mathbf{A} U + \beta P^T \mathbf{A} V = 0$$

Pozn. stejně taky pro rovinu v $\mathbb{C}P^3$.

Regulární a singulární body

Definice (Regulární a singulární body)

Bod P nazveme *singulární bod kvadriky* \mathcal{Q} , je-li polárně sdružen se všemi body prostoru $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$. Body kvadriky, které nejsou singulární, nazveme *regulární body kvadriky*.

Věta

Nechť $P \in \mathcal{Q}$ je singulární bod kvadriky \mathcal{Q} a bod $Q \neq P$ leží na \mathcal{Q} , potom přímka \overleftrightarrow{PQ} leží na kvadrice \mathcal{Q} .

Důkaz (Expresne)

$$(\alpha P + \beta Q)^T \mathbf{A} (\alpha P + \beta Q) = \alpha^2 P^T \mathbf{A} P + 2\alpha\beta P^T \mathbf{A} Q + \beta^2 Q^T \mathbf{A} Q = 0$$

Pól a polára

Definice (Pól a polára)

Nechť P není singulární bod kvadriky \mathcal{Q} , pak nadrovinu bodů v $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ polárně sdružených s P nazýváme *polární nadrovinou pólu* P vzhledem ke kvadrice \mathcal{Q} .

v $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$: pól \leftrightarrow polára

v $\mathbb{C}\mathbb{P}^3$: pól \leftrightarrow polární rovina

Polární nadrovina bodu P vzhledem ke \mathcal{Q} s maticí \mathbf{A} má obecnou rovnici:

$$P^T \mathbf{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_0 \end{pmatrix} = 0.$$

Pól a polára

Věta (Vzájemnost pólu a polární nadroviny)

Nechť různé body P, Q nejsou singulární body kvadriky \mathcal{Q} s maticí \mathbf{A} . Leží-li bod Q v polární nadrovině bodu P , potom leží i bod P v polární nadrovině bodu Q vzhledem ke kvadrice \mathcal{Q} .

Důkaz

Polární nadrovina bodu P je množina bodů $X = (x_1, \dots, x_n, x_0)$, že $P^T \mathbf{A} X = 0 \Rightarrow P^T \mathbf{A} Q = 0$, ale $P^T \mathbf{A} Q = Q^T \mathbf{A} P$ ze symetrie \mathbf{A} .

Pól a polára

Definice (Tečná nadrovina)

Nechť T je regulární bod kvadriky Q . Polární nadrovinu bodu T vzhledem ke kvadrice Q nazýváme *tečná nadrovina* a bod T její *bod dotyku*.

Věta

Tečné nadroviny vedené ke kvadrice Q z bodu $P \notin Q$ se jí dotýkají v bodech, v nichž polární nadrovina bodu P vzhledem ke Q protíná kvadriku Q .

Důkaz

Důsledek definice tečné nadroviny a věty o vzájemnosti pólu a polární nadroviny.

Matrice kvadriky vzhledem k polární bázi

Je-li \mathbf{A} matice kvadriky, lze ji převést pomocí symetrických řádkových a (analogických) sloupcových úprav na diagonální matici \mathbf{A}' . Matice \mathbf{A}' se nazývá matice kvadriky vzhledem k *polární bázi*.

Příklad

$$c : x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 8x_0x_2 - 4x_0^2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \sim \left[2 \cdot -1 \cdot \text{ř} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \quad 2 \cdot -1 \cdot \text{s} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\left[2 \cdot +3 \cdot \text{ř} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \quad 2 \cdot +3 \cdot \text{s} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$c' : x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_0^2 = 0$$

Pozn. Konvence: matici upravujeme tak, aby na diagonále bylo vždy více kladných čísel. Resp. vynásobíme celou matici (-1) .

POZOR: provádíme kolineace, které nezachovávají afinní vlastnosti, matici nemůžeme použít dále pro afinní klasifikaci. ☠

Signatura kvadratické formy

Definice

Je-li $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonální matice, pak trojici (n, p, q) , kde n je počet nul, p je počet kladných čísel a q je počet záporných čísel na diagonále nazýváme *signaturou matice \mathbf{A}* .

Signaturou kvadratické formy nazýváme signaturu její matice vůči polární bázi.

Projektivní klasifikace kuželoseček

Typy kuželoseček v $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$

Kuželosečka $\mathcal{Q} : X^T \mathbf{A} X = 0$

$h(\mathbf{A})$ hodnost matice kuželosečky:

hodnost	signatura	\mathbb{R} body	rovnice	projektivní typ v $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$
$h(\mathbf{A}) = 3$	(0, 3, 0)	\emptyset \mathbb{R} bodů	$x_1^2 + x_2^2 + x_0^2 = 0$	\mathbb{I} regulární KS
$h(\mathbf{A}) = 3$	(0, 2, 1)	obsahuje \mathbb{R} body	$x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0$	\mathbb{R} regulární KS (el., par., hyp.)
$h(\mathbf{A}) = 2$	(1, 2, 0)	1 \mathbb{R} bod	$x_1^2 + x_2^2 = 0$	2 \mathbb{I} přímky
$h(\mathbf{A}) = 2$	(1, 1, 1)	obsahuje \mathbb{R} body	$x_1^2 - x_2^2 = 0$	2 \mathbb{R} přímky
$h(\mathbf{A}) = 1$	(2, 1, 0)	obsahuje \mathbb{R} body	$x_1^2 = 0$	2-násobná \mathbb{R} přímka

Projektivní klasifikace kvadrik

Typy kvadrik v $\mathbb{C}P^3$

hodnost	signatura	\mathbb{R} body	rovnice	projektivní typ v $\mathbb{C}P^3$
$h(\mathbf{A}) = 4$	(0, 4, 0)	\emptyset \mathbb{R} bodů	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_0^2 = 0$	I regulární
$h(\mathbf{A}) = 4$	(0, 3, 1)	obsahuje \mathbb{R} body	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2 = 0$	\mathbb{R} regulární (nepřímková)
$h(\mathbf{A}) = 4$	(0, 2, 2)	obsahuje \mathbb{R} body	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_0^2 = 0$	\mathbb{R} regulární (přímková)
$h(\mathbf{A}) = 3$	(1, 3, 0)	1 \mathbb{R} bod	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	I kuželová plocha
$h(\mathbf{A}) = 3$	(1, 2, 1)	obsahuje \mathbb{R} body	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$	\mathbb{R} kuželová plocha
$h(\mathbf{A}) = 2$	(2, 2, 0)	přímka \mathbb{R} bodů	$x_1^2 + x_2^2 = 0$	2 I roviny
$h(\mathbf{A}) = 2$	(2, 1, 1)	obsahuje \mathbb{R} body	$x_1^2 - x_2^2 = 0$	2 \mathbb{R} roviny
$h(\mathbf{A}) = 1$	(3, 1, 0)	obsahuje \mathbb{R} body	$x_1^2 = 0$	2-násobná \mathbb{R} rovina

Afinní vlastnosti a klasifikace.

Kvadriky v projektivním rozšíření afinního prostoru $\overline{\mathbb{A}}_C$ rozlišujeme podle počtu (resp. množin) nevlastních bodů (asymptotických směrů). Z afinních vlastností zjistíme u kuželoseček jejich asymptoty (tečny v nevlastních bodech), sdružené průměry (body polárně sdružené k nevlastním) a z nich střed (vlastní/ nevlastní) a středovost kuželosečky (středová/ nestředová).

Matice kuželosečky

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

označme $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} b & d \\ c & e \end{pmatrix}$ $\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \end{pmatrix}$ $\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

Sdružené směry, průměrové nadroviny

Definice (Průměrová nadrovina)

Nechť U_∞ je nevlastní bod (směr), který není bodem kvadriky Q v $\overline{\mathbb{A}}_C$. Polární nadrovina bodu U_∞ vzhledem ke kvadrice Q se nazývá *průměrová nadrovina* kvadriky.

V $\overline{\mathbb{A}}_C^2$ nazýváme průměrovou nadrovinu průměr.

Průměry, z nichž každý je sdružený se směrem druhého se nazývají *sdružené průměry*.

Asymptotické směry, asymptoty

Definice (Asymptotický směr)

Nevlastní bod kvadriky v $\overline{\mathbb{A}}_{\mathbb{C}}$ se nazývá *asymptotický směr* kvadriky.

T.j. hledáme všechny body kvadriky, pro které platí $x_0 = 0$.

Dosazením do rovnice KS je to tedy množina nevlastních bodů splňující $ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 = 0$.

Obecně pro $x_1 \neq 0$ je $\langle(x_1, x_2, 0)\rangle = \langle(1, \frac{x_2}{x_1}, 0)\rangle$ a máme kvadratickou rovnici s koeficienty $a, 2b, c$ která má

- 2 reálné kořeny (nevlastní body) pro $b^2 - ac > 0$ reg: hyperbola, sing: $2 \mathbb{I}, \mathbb{R}$ různoběžky.
- 1 dvojnásobný reálný kořen (nevlastní bod) pro $b^2 - ac = 0$ reg: parabola, sing: $2 \mathbb{I}, \mathbb{R}$ rovnoběžky, 1 vlastní a 1 nevlastní přímka, 1 dvojnásobná přímka.
- žádný reálný kořen pro $b^2 - ac < 0$ reg: \mathbb{I}, \mathbb{R} elipsa.

Z matice $b^2 - ac = -\det \mathbf{A}_3$

Definice (Asymptotická nadrovina)

Tečná nadrovina v nevlastním bodě kvadriky se nazývá *asymptotická nadrovina* kvadriky.

Tečna v nevlastním bodě \rightarrow asymptota v $\overline{\mathbb{A}}_{\mathbb{C}}^2$.

T.j. polára asymptotického směru vzhledem ke KS je asymptota.

Střed

Definice (Střed)

Bod S nazýváme *středem kvadriky*, je-li polárně sdružen s každým nevlastním bodem prostoru $\overline{\mathbb{A}}_{\mathbb{C}}$ vzhledem ke kvadrice.

T.j. u KS v obecném případě volíme dva nevlastní body $I_{\infty} = (1, 0, 0)$, $J_{\infty} = (0, 1, 0)$ a střed je průsečíkem jejich průměrů.

$$i : (1, 0, 0)\mathbf{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_0 \end{pmatrix} = ax_1 + bx_2 + dx_0 = 0; \quad j : (0, 1, 0)\mathbf{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_0 \end{pmatrix} = bx_1 + cx_2 + ex_0 = 0$$

Průsečík průměrů i, j je

$$(a, b, c) \times (b, c, e) = (\det \mathbf{A}_1, -\det \mathbf{A}_2, \det \mathbf{A}_3) = (s_1, s_2, s_0) - \text{souřadnice středu } S.$$

Střed

Definice (Středovost kvadriky)

Kvadrika, která má alespoň jeden vlastní střed se nazývá *středová*, *centrická*. V opačném případě se nazývá *nestředová*.

Několik důsledků přímo z definic:
Singulární bod KS je středem KS.
Průměry KS prochází středem KS.
Asymptoty KS prochází středem KS.

Středové kuželosečky jsou reg: \mathbb{I}, \mathbb{R} elipsa, hyperbola a sing: $2\mathbb{I}, \mathbb{R}$ vlastní různoběžky.

Vedlejší signatura

Signaturu kvadratické formy vůči polární bázi dále nazýváme *hlavní signatura*.

Definice (Vedlejší signatura)

Signaturu matice kvadratické formy s vynechaným posledním řádkem a posledním sloupcem nazýváme *vedlejší signatura*.

Afinní klasifikace kuželoseček

hlavní sgn	vedlejší sgn	∞ body	rovnice	afinní typ v $\mathbb{C}P^2$
(0, 3, 0)	(0, 2, 0)	\emptyset	$x_1^2 + x_2^2 + x_0^2 = 0$	I elipsa
(0, 2, 1)	(0, 2, 0)	\emptyset	$x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0$	\mathbb{R} elipsa
(0, 2, 1)	(0, 1, 1)	2	$x_1^2 - x_2^2 - x_0^2 = 0$	\mathbb{R} hyperbola
(0, 2, 1)	(1, 1, 0)	1	$x_1^2 + 2x_0x_2 = 0$	\mathbb{R} parabola
(1, 2, 0)	(0, 2, 0)	2	$x_1^2 + x_2^2 = 0$	2 I různoběžky
(1, 2, 0)	(1, 1, 0)	1	$x_1^2 + x_0^2 = 0$	2 I rovnoběžky
(1, 1, 1)	(0, 1, 1)	2	$x_1^2 - x_2^2 = 0$	2 \mathbb{R} různoběžky
(1, 1, 1)	(1, 1, 0)	1	$x_1^2 - x_0^2 = 0$	2 \mathbb{R} rovnoběžky
(1, 1, 1)	(2, 0, 0)	přímka	$x_0x_2 = 0$	vlastní \mathbb{R} a nevlastní \mathbb{R} přímka
(2, 1, 0)	(1, 1, 0)	1	$x_1^2 = 0$	2-násobná \mathbb{R} přímka
(2, 1, 0)	(2, 0, 0)	přímka	$x_0^2 = 0$	2-násobná nevlastní \mathbb{R} přímka

Afinní klasifikace kvadrik

hlavní sgn	vedlejší sgn	∞ body	rovnice	afinní typ v \mathbb{CP}^3
(0, 4, 0)	(0, 3, 0)	\emptyset	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_0^2 = 0$	I elipsoid
(0, 3, 1)	(0, 3, 0)	\emptyset	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2 = 0$	\mathbb{R} elipsoid
(0, 3, 1)	(0, 2, 1)	reg. KS	$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_0^2 = 0$	\mathbb{R} dvojdílný hyperboloid
(0, 3, 1)	(1, 2, 0)	1	$x_1^2 + x_2^2 + 2x_3x_0 = 0$	\mathbb{R} eliptický paraboloid
(0, 2, 2)	(0, 2, 1)	reg. KS	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_0^2 = 0$	\mathbb{R} jednodílný hyperboloid
(0, 2, 2)	(1, 1, 1)	2 různoběžky	$x_1^2 - x_2^2 + 2x_3x_0 = 0$	\mathbb{R} hyperbolický paraboloid
(1, 3, 0)	(0, 3, 0)	reg. KS	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	I kuželová plocha
(1, 3, 0)	(1, 2, 0)	1	$x_1^2 + x_2^2 + x_0^2 = 0$	I válcová plocha
(1, 2, 1)	(0, 2, 1)	reg. KS	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$	\mathbb{R} kuželová plocha
(1, 2, 1)	(1, 2, 0)	1	$x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0$	\mathbb{R} eliptická válcová plocha
(1, 2, 1)	(1, 1, 1)	2 různoběžky	$x_1^2 - x_2^2 - x_0^2 = 0$	\mathbb{R} hyperbolická válcová plocha
(1, 2, 1)	(2, 1, 0)	2-násobná přímka	$x_1^2 + 2x_2x_0 = 0$	\mathbb{R} parabolická válcová plocha
...				

Afinní klasifikace kvadrik

hlavní sgn	vedlejší sgn	∞ body	rovnice	afinní typ v $\mathbb{C}\mathbb{P}^3$
...				
(2, 2, 0)	(1, 2, 0)	2 různoběžky	$x_1^2 + x_2^2 = 0$	2 \mathbb{I} různoběžné roviny
(2, 2, 0)	(2, 1, 0)	2-násobná přímka	$x_1^2 + x_0^2 = 0$	2 \mathbb{I} rovnoběžné roviny
(2, 1, 1)	(1, 1, 1)	2 různoběžky	$x_1^2 - x_2^2 = 0$	2 \mathbb{R} různoběžné roviny
(2, 1, 1)	(2, 1, 0)	2-násobná přímka	$x_1^2 - x_0^2 = 0$	2 \mathbb{R} rovnoběžné roviny
(2, 1, 1)	(3, 0, 0)	rovina body	$x_1 x_0 = 0$	vlastní \mathbb{R} a nevlastní \mathbb{R} rovina
(3, 1, 0)	(2, 1, 0)	přímka	$x_1^2 = 0$	2-násobná \mathbb{R} rovina
(3, 1, 0)	(3, 0, 0)	rovina	$x_0^2 = 0$	2-násobná nevlastní \mathbb{R} rovina

Metrické vlastnosti kuželoseček

Kuželosečky v projektivním rozšíření komplexního prostoru $\mathbb{C}P^n$ rozlišujeme podle metrických vlastností, t.j. hlavní směry (směry sdružené s kolmými) a jejich poláry - osy souměrnosti. Průsečíky os souměrnosti a kuželosečky jsou vrcholy.

Hlavní směry

Definice (Hlavní směry)

Směr určený vektorem $\vec{o} \neq \vec{u} \in \mathbb{R}^2$ nazýváme *hlavním směrem* kuželosečky c , je-li polárně sdružen s vzájemně kolmým směrem vzhledem ke kuželosečce c .

Věta

Ke každé kuželosečce existují alespoň dva na sebe kolmé hlavní směry. Jsou to vlastní vektory matice \mathbf{A}_3 (z předešlého značení).

Hlavní směry

Věta

Ke každé kuželosečce existují alespoň dva na sebe kolmé hlavní směry. Jsou to vlastní vektory matice \mathbf{A}_3 (z předešlého značení).

$$\vec{u}^T \mathbf{A} \vec{v} = (u_1, u_2, 0) \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} = (u_1, u_2) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$0 = \vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 = (u_1, u_2) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \vec{u}^T \lambda \mathbf{E} \vec{v}$$

$$\vec{u}^T (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \vec{v} = 0$$

Je-li vlastní číslo 2-násobné - matice má nekonečně mnoho vlastních vektorů. Vybíráme dva ne sebe kolmé. (např. kružnice)

Je-li vlastní číslo 0 - pak je kuželosečka nestředová (střed je nevlastní). (např. parabola)

Osy



Definice (Osy)

Je-li U_∞ nevlastní nesingulární bod určený hlavním směrem kuželosečky c , potom poláru bodu U_∞ vzhledem k c , pokud' je to vlastní přímka, nazýváme *osou kuželosečky*.

Pozn. Je-li hlavní směr kuželosečky nevlastním singulárním bodem kuželosečky, pak definujeme jako osu kuželosečky libovolnou vlastní přímku, která je kolmá na tento směr.

Pro regulární: elipsa a hyperbola mají 2 osy, parabola má jednu osu souměrnosti.

Pro pozn.: např. 2 rovnoběžky.

Vrcholy



Definice (Vrchol)

Vlastní průsečík kuželosečky s její osou se nazývá *vrchol kuželosečky*.

Elipsa má 4 vrcholy (hlavní a vedlejší), hyperbola má 2 reálné vrcholy, parabola má 1 reálný vrchol.

Kružnice má ∞ vrcholů.

Ohniska



Definice (Ohniska)

Nechť je daný bod M na regulární kuželosečce. Pak body F_1 a F_2 nazýváme *ohniska*

- elipsy, pokud platí $|F_1M| + |F_2M| = 2a$ a současně $|F_1F_2| < 2a$, kde a je délka hlavní poloosy.
- hyperboly, pokud platí $||F_1M| - |F_2M|| = 2a$ a současně $|F_1F_2| > 2a$, kde a je délka hlavní poloosy.
- paraboly, pokud platí $|F_1M| = |dM|$, kde d je řídicí přímka paraboly.

Spojnice F_1M , F_2M , resp. přímku rovnoběžnou s osou procházející bodem M u paraboly nazýváme *průvodiče bodu kuželosečky*.

Vzdálenost ohnisek od středu kuželosečky nazýváme excentricita e (výstřednost) kuželosečky.

Ohniska



Ohniska je možné dohledat např. pomocí vztahů:

- elipsa: $e^2 = a^2 - b^2$.
- hyperbola: $e^2 = a^2 + b^2$

nebo z vlastnosti, že tečna pŕli ůhel pŕvodičŕ.