Geometrie — opakování

Michal Zamboj

Pedagogická fakulta

ZS 2020/2021

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~zamboj/

Hermann Grassmann, 1809-1877

Vektorový prostor

Definice (Vektorový prostor)

Je dáno těleso $\mathbb{T}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Vektorovým prostorem **V** nad tělesem $\mathbb{T}$ rozumíme množinu V spolu s binární operací $+$ $(\mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V})$ a operací $\cdot$ násobení prvků z V prvkem z $\mathbb{T}$ $(\mathbb{V} \times \mathbb{T} \to \mathbb{V})$, pro které platí následující axiomy:

1.1 Pro libovolné $\vec{u}, \vec{v} \in V$ platí $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

1.2 Pro libovolné $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ platí $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$.

1.3 $\exists\ \vec{o} \in V; \vec{o} + \vec{u} = \vec{u}$.

1.4 Pro každé $\vec{u} \in V, \exists - \vec{u} \in V; \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{o}$.

2.1 Pro libovolné $\vec{u} \in V$ a $a, b \in \mathbb{T}$ platí $a \cdot (b \cdot \vec{u}) = (a \cdot b) \cdot \vec{u}$.

2.2 Pro libovolné $\vec{u} \in V$ platí $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$.

2.3 Pro libovolné $\vec{u} \in V$ a $a, b, \in \mathbb{T}$ platí $(a + b) \cdot \vec{u} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{u}$.

2.4 Pro libovolné $\vec{u}, \vec{v} \in V$ a $a \in \mathbb{T}$ platí $a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = a \cdot \vec{u} + a \cdot \vec{v}$.

$\mathbb{R}^n$ nazýváme aritmetický vektorový prostor

Vektorový prostor

Definice (Vektorový podprostor)

Neprázdnou množinu $\mathbf{W} \subset \mathbf{V}$ nazveme *vektorovým podprostorem* prostoru $\mathbf{V}$, jestliže

- $\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbf{W}; \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in \mathbf{W}$,
- $\forall a \in \mathbb{R}, \forall \overrightarrow{u} \in \mathbf{W}; a \cdot \overrightarrow{u} \in \mathbf{W}$.

Věta (Vlastnosti vektorových podprostorů)

- $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_k} \in \mathbf{W} \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} a_i \overrightarrow{u_i} \in \mathbf{W}$
- $\overrightarrow{o} \in \mathbf{W}$
- *Každý podprostor vektorového prostoru je vektorový prostor.*

Definice (LNZ a LZ)

Konečná množina vektorů $\mathbf{S} = \overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_k}$ vektorového prostoru **V** se nazývá *lineárně nezávislá*, jestliže rovnice

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \overrightarrow{v_i} = 0$$

má jediné řešení $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0$. V opačném případě se nazývá *lineárně závislá*.

Definice (Lineární kombinace)

Vektor $\overrightarrow{v}$ vektorového prostoru **V** se nazývá *lineární kombinací* vektorů $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_k} \in \mathbf{V}$, jestliže existují skaláry $a_1, a_2, \ldots, a_k$ takové, že $\overrightarrow{v} = \sum_{i=1}^{k} a_i \overrightarrow{v_i}$.

Vektorový prostor

Definice (Báze)

Báze je množina lineárně nezávislých vektorů, které generují celý vektorový prostor.

Definice (Dimenze (rozměr) vektorového prostoru)

Dimenzí $\dim \mathbf{V}$ vektorového prostoru $\mathbf{V}$ budeme rozumět mohutnost jeho libovolné báze.
Zn. $\mathbf{V}^n$ je vektorový prostor dimenze n, resp. n-rozměrný vektorový prostor.

Afinní prostor

Definice (Afinní prostor)

Mějme danou neprázdnou množinu **A**, vektorový prostor $\mathbf{V}^n(\mathbb{T})$ a zobrazení $f : \mathbf{A} \times \mathbf{A} \to \mathbf{V}^n$. Trojicí $(\mathbf{A}, \mathbf{V}^n, f)$ nazýváme *n-rozměrný afinní prostor*, jestliže platí:

1. Pro každé $X, Y, Z \in \mathbf{A}$ je $f(X, Y) + f(Y, Z) = f(X, Z)$.

   linearita

2. Existuje $P \in \mathbf{A}$ tak, že zobrazení f_P množiny **A** do prostoru $\mathbf{V}^n$, přiřazující každému $X \in \mathbf{A}$ vektor $f(P, X)$, je vzájemně jednoznačné.

   bod $\leftrightarrow$ vektor

A je *nosič afinního prostoru*,

$\mathbf{V}^n$ je *zaměření afinního prostoru*,

prvky množiny **A** nazýváme *body afinního prostoru*,

$\mathbb{A}^1$ je afinní přímka, $\mathbb{A}^2$ je afinní rovina,

vektor $f(X, Y)$ zapisujeme ve tvaru $(Y - X)$

Afinní prostor

Definice (Repér)

Buď $P \in \mathbb{A}^n$ a $\beta = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ buď báze $\mathbf{V}^n$. Potom uspořádanou $(n+1)$-tici $\mathcal{R} = (P; \overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ nazýváme *repér* v prostoru $\mathbb{A}^n$.

Definice (LSS)

Mějme v prostoru $\mathbb{A}^n$ dán repér $\mathcal{R} = (P; \overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$. Zobrazení $\mathcal{L}$, které každému bodu $X \in \mathbb{A}^n$ přiřadí n-tici $[x_1, \dots, x_n]$ definovanou vztahem $X = P + x_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n}$, nazýváme *lineární soustava souřadnic* určená repérem $\mathcal{R}$.

bod P nazýváme *počátek* LSS $\mathcal{L}$,

$\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}$ nazýváme souřadnicové vektory,

$[x_1, \dots, x_n]$ souřadnice bodu X vzhledem k LSS $\mathcal{L}$ určené repérem $\mathcal{R}$

zn. $X = [x_1, \dots, x_n]$

Afinní podprostory

Parametrické vyjádření podprostoru $\mathbb{R}^n$, procházejícího bodem P:

$$X = P + t_1\overrightarrow{u_1} + t_2\overrightarrow{u_2} + \cdots + t_n\overrightarrow{u_n}$$

t.j.:

$$x_1 = p_1 + t_1 u_{1_1} + t_2 u_{2_1} + \cdots + t_n u_{n_1}$$
$$\vdots$$
$$x_n = p_n + t_1 u_{1_n} + t_2 u_{2_n} + \cdots + t_n u_{n_n}$$

pro $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$

Obecná rovnice nadroviny $\mathbb{R}^n$:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n + a_{n+1} = 0,$$

pro $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$

Vzájemná poloha afinních podprostorů

Věta (Průnik podprostorů)

Afinní podprostory $\mathbb{A}^k\{U, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2} \dots\}$, $\mathbb{A}^l\{V, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \dots\}$ *prostoru* $\mathbb{A}^n, n \geq k, l$, *mají neprázdný průnik, právě když vektor* $(U - V)$ *je lineární kombinací vektorů* $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \dots$.

Vzájemná poloha afinních podprostorů

Definice

Dva podprostory $\mathbb{A}^k, \mathbb{A}^n$ prostoru $\mathbb{E}^n$ nazýváme

- *incidentní*, jestliže jeden z nich je podprostorem druhého,
- *rovnoběžné*, jestliže vektorové zaměření jednoho z nich je podprostorem druhého,
- *různoběžné*, jestliže $\mathbb{A}^k, \mathbb{A}^l$ nejsou rovnoběžné a jejich průnik je neprázdný,
- *částečně rovnoběžné*, jestliže nejsou rovnoběžné ani různoběžné, ale jejich zaměření mají neprázdný průnik,
- *mimoběžné*, jinak.

Dělicí poměr

Definice (Dělicí poměr)

Nechť A, B, C jsou tři různé kolineární body. *Dělicí poměr bodu C vzhledem k bodům A, B*, je reálné číslo λ takové, že

$$\lambda(B - C) = (A - C).$$

Zn. $(AB; C)$ (taky (ABC))

Eukleidovský prostor

Definice (Skalární součin)

Skalární součin na vektorovém prostoru **V** je zobrazení $(\cdot) : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$, které splňuje pro všechna $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbf{V}$; $c \in \mathbb{R}$:

- pro $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{o} : \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} > 0$,
- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$,
- $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}$,
- $(c\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = c(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})$.

$\overrightarrow{u} = (u_1, \dots, u_n)$, $\overrightarrow{v} = (v_1, \dots, v_n)$

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

Definice (Kolmost)

Je-li $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$ pro $\overrightarrow{u} \neq 0$, $\overrightarrow{v} \neq 0$, pak jsou vektory $\overrightarrow{u}$ a $\overrightarrow{v}$ na sebe *kolmé* $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$.

Definice (Velikost vektoru)

Velikost vektoru v je

$$\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}}$$

Pozn. velikost vektoru je *norma* (indukována skalárním součinem).

Definice (Odchylka dvou vektorů)

Odchylka φ dvou vektorů $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ je

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\| \|\overrightarrow{v}\|}$$

Definice (Vzdálenost)

Vzdálenost dvou bodů A, B je rovna velikosti vektoru $(A - B)$.

$$d(A, B) = \|A - B\|$$

Vzdálenost bodu $P = [p_1, \dots p_n]$ od nadroviny $\rho = (Q, \overrightarrow{s_1}, \dots, \overrightarrow{s_n}) = a_1x_1 + \dots a_nx_n + a_{n+1}$ je:

$$= d(A, \rho) = \frac{|\overrightarrow{n_\rho} \cdot (Q - P)|}{\|\overrightarrow{n_\rho}\|} = \frac{|a_1p_1 + \dots + a_np_n + a_{n+1}|}{\|\overrightarrow{n_\rho}\|}$$

Vzdálenost bodu $P = [p_1, \dots p_n]$ od přímky $q = (Q, \overrightarrow{s})$ v $\mathbb{R}^3$ je:

$$d(P, q) = \sqrt{d(P, Q)^2 - \left(\frac{\overrightarrow{s} \cdot (Q - P)}{\|\overrightarrow{s}\|}\right)^2}$$

Shodná zobrazení

Definice (Shodná zobrazení - izometrie)

Zobrazení $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ se nazývá *shodné zobrazení* právě když pro libovolné dva různé body $A, B \in \mathbb{E}$ a jejich obrazy A', B' platí

$$|A'B'| = |AB|.$$

Definice

Vzájemně jednoznačné shodné zobrazení se nazývá *shodnost*.

přímá shodnost zachovává orientaci prostoru $\circlearrowright \to \circlearrowright$

nepřímá shodnost nezachovává orientaci prostoru $\circlearrowright \to \circlearrowleft$

Definice (Symetrie podle podprostoru)

Nechť je v $\mathbb{E}^n$ zvolen vlastní podprostor $\mathbb{E}^k$. *Symetrií prostoru $\mathbb{E}^n$ podle podprostoru $\mathbb{E}^k$* budeme rozumět zobrazení $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$, které každému bodu $X \in \mathbb{E}^n$ přiřadí bod $f(X) \in \mathbb{E}^n$ takový, že střed úsečky $\overline{XX'}$ je kolmým průmětem bodu X do podprostoru $\mathbb{E}^k$.

Věta

Symetrie podle podprostoru je involuce a shodnost.

Věta

Každá involutorní shodnost prostoru $\mathbb{E}^n$ je symetrií podle nějakého podprostoru $\mathbb{E}^n$, nebo identita.

Definice (Základní shodnost)

Nechť $\mathbb{E}^n$ je eukleidovský prostor.
Základní shodností prostoru $\mathbb{E}^n$ je symetrie tohoto prostoru podle své nadroviny $\mathbb{E}^{n-1}$.

Věta

Nechť $\mathbb{E}^n$ je eukleidovský prostor. Každou shodnost f prostoru $\mathbb{E}^n$ lze rozložit na k základních shodností $f_0, f_1, \dots, f_{k-1}$, $k \leq n+1$ tak, že

$$f = f_{k-1} \circ \cdots \circ f_1 \circ f_0.$$

Analytické vyjádření základní shodnosti podle nadroviny

$$\rho : c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n + c_0 = 0$$
$$X = [x_1, \ldots x_n] \to X' = [x'_1, \ldots x'_n]$$
$$\vdots$$
$$x'_j = x_j - 2\frac{c_j(c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n + c_0)}{c_1^2 + \cdots + c_n^2}.$$

Podobná zobrazení

Definice (Podobná zobrazení)

Zobrazení $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ se nazývá *podobné zobrazení*, právě když existuje kladné číslo $k \in \mathbb{R}$ tak, že pro libovolné dva různé body $A, B \in \mathbb{E}$ platí

$$|f(X)f(Y)| = k \cdot |XY|.$$

Číslo k nazýváme *koeficient podobnosti*.

Definice

Vzájemně jednoznačné podobné zobrazení se nazývá *podobnost*.

$k = 1$ nevlastní podobnost (shodnost)

$k \neq 1$ vlastní podobnost

přímá podobnost zachovává orientaci prostoru $\circlearrowleft \rightarrow \circlearrowleft$

nepřímá podobnost nezachovává orientaci prostoru $\circlearrowleft \rightarrow \circlearrowright$

Podobná zobrazení

Věta

Nechť $\mathbb{E}^n$ *je eukleidovský prostor. Každá vlastní podobnost prostoru* $\mathbb{E}^n$ *má právě jeden samodružný bod.*

Definice (Afinní prostor)

Mějme dánou neprázdnou množinu $\mathbf{A}$, vektorový prostor $\mathbf{V}_n(\mathbb{T})$ a zobrazení $f : \mathbf{A} \times \mathbf{A} \to \mathbf{V}_n$. Trojicí $(\mathbf{A}, \mathbf{V}_n, f)$ nazýváme *n-rozměrný afinní prostor*, jestliže platí:

1. Pro každé $X, Y, Z \in \mathbf{A}$ je $f(X, Y) + f(Y, Z) = f(X, Z)$.

   linearita

2. Existuje $P \in \mathbf{A}$ tak, že zobrazení f_P množiny $\mathbf{A}$ do prostoru $\mathbf{V}_n$, přiřazující každému $X \in \mathbf{A}$ vektor $f(P, X)$, je vzájemně jednoznačné.

   bod $\leftrightarrow$ vektor

$\mathbf{A}$ je *nositel afinního prostoru*,

$\mathbf{V_n}$ je *zaměření afinního prostoru*,

prvky množiny $\mathbf{A}$ nazýváme *body afinního prostoru*,

$\mathbb{A}^1$ je afinní přímka, $\mathbb{A}^2$ je afinní rovina,

vektor $f(X, Y)$ zapisujeme ve tvaru $(Y - X)$,

Afinní zobrazení

Definice (Afinní zobrazení)

Nechť $\mathbb{A}^n$ a $\mathbb{A}'^m$ jsou dva afinní prostory. Zobrazení $f : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}'^m$ nazýváme *afinní zobrazení* prostoru $\mathbb{A}^n$ do prostoru $\mathbb{A}'^m$ právě tehdy, když pro všechny trojice různých kolineárních bodů $X, Y, Z \in \mathbb{A}^n$ platí:

- $X' = f(X), Y' = f(Y), Z' = f(Z)$ buďto splynou nebo jsou tři různé kolineární body.
- Je-li $X' \neq Y' \neq Z'$, tak $(XY; Z) = (X'Y'; Z')$

Definice (Afinita)

Afinita je vzájemně jednoznačné afinní zobrazení.

Pozn. afinita zachovává rovnoběžnost a dělící poměr.

Afinní zobrazení

Analytické vyjádření afinity v $\mathbb{A}^2$

$f : X \to X'$
$x' = ax + by + p_x$
$y' = cx + dy + p_y$

$\overrightarrow{p} = (p_x, p_y)$ je vektor posunutí

Matice afinity **A**:

$X' = \mathbf{A}X + \overrightarrow{p}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

A je regulární, t.j. ($\det \mathbf{A} \neq 0$)

Samodružné body:
$X = X'$

$$\begin{matrix} x = ax + by + p_x \\ y = cx + dy + p_y \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 0 = (a-1)x + by + p_x \\ 0 = cx + (d-1)y + p_y \end{matrix}$$

Samodružné směry:
$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u'}$

$$\begin{matrix} \kappa u_1 = au_1 + bu_2 \\ \kappa u_2 = cu_1 + du_2 \end{matrix} \rightarrow \text{vlastní čísla } \mathbf{A}\text{, t.j.:} \begin{pmatrix} a-\kappa & b \\ c & d-\kappa \end{pmatrix}$$

Definice (Základní afinita)

Nechť $\mathbb{A}^n$ je afinní prostor.
Základní afinitou prostoru $\mathbb{A}^n$ je afinita, jejíž množina samodružných bodů je nadrovina prostoru $\mathbb{A}^n$.

Věta

Nechť $\mathbb{A}^n$ je afinní prostor. Každou afinitu f prostoru $\mathbb{A}^n$ lze rozložit na k základních afinit $f_0, f_1, \dots, f_{k-1}$, $k \leq n+1$ tak, že

$$f = f_{k-1} \circ \cdots \circ f_1 \circ f_0.$$

Afinní zobrazení

Věta

Nechť $\mathbb{A}^n$ je afinní prostor. Nechť ρ je nadrovina prostoru $\mathbb{A}^n$, která má rovnici

$$\rho : c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n + c_0 = 0.$$

Je-li f základní afinita, jejíž množina všech samodružných bodů je ρ, potom existují $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tak, že analytické vyjádření základní afinity f má tvar:

$$f : x_j' = x_j + \lambda_j (c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n + c_0), \text{ kde } j = 1, \ldots, n.$$

Klasifikace zobrazení

$X' = \mathbf{A}X + \overrightarrow{p}$, kde $\mathbf{I}$ je matice identity

afinita	$\det \mathbf{A} \neq 0$
podobnost	$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = k^2\mathbf{I}$
stejnolehlost	$\mathbf{A} = \lambda\mathbf{I}, \lambda \neq 0$
shodnost	$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}$
středová souměrnost	$\mathbf{A} = -\mathbf{I}$
posunutí	$\mathbf{A} = \mathbf{I}$
identita	$\mathbf{A} = \mathbf{I}, \overrightarrow{p} = \overrightarrow{o}$

$\det \mathbf{A} > 0$ přímá
$\det \mathbf{A} < 0$ nepřímá