

Analytická Geometrie

LS 2022/23

1. série domácích úkolů
termín odevzdání 09.04.2023

Vyřešte 8 úloh, za podmínky, že z každé skupiny vyřešíte alespoň 2 úlohy. Řešení odevzdávejte do moodle jako jeden soubor ve formátu .pdf; buď to čitelně napsané + kvalitně naskenované, nebo vypracováno v nějakém textovém (např. L^AT_EX, nebo MS Word) a grafickém editoru (např. GeoGebra). Řešit můžete společně, v tom případě se podepište na jeden papír a neodevzdávejte úlohy osobitně.

Pozn. Najdete-li chybu, neváhejte mi napsat, může to ušetřit tápání Vašich kolegů.

Pozn. 2: Sloučení skenů do .pdf je součástí běžně dostupného softwaru, obvykle postačuje kvalita 200-300dpi. Další možnost je použít verzi Adobe Acrobat Pro, ve které je možné vytvořit sloučené .pdf z různých vstupních souborů (obrázky, dokumenty). V MacOS je možné jednoduše použít ke stejnému účelu zabudovaný program Preview.

Afinní a Eukleidovský prostor

1. Vyšetřete vzájemnou polohu přímek p, q v \mathbb{R}^3 je-li
 - a) přímka p určená bodem $[0, 0, -1]$ a směrovým vektorem $(1, 1, 3)$ a přímka q prochází bodem $[0, -1, 2]$ a má směrový vektor $(2, 3, 3)$.
 - b) přímka p průsečnicí rovin s obecnými rovnicemi $x - 3y - z + 1 = 0$ a $-2x + 2y + z = 0$ a přímka q prochází bodem $[a, 0, 0]$ a má směrový vektor $(1, -1, b)$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ jsou parametry.
2. V \mathbb{R}^3 jsou dány body $A = [1, 2, -1], B = [2, 2, 0], C = [3, 1, -1]$. Rozhodněte zda tyto body určují jednoznačně rovinu, pokud ano určete její obecnou rovnici.
3. Vyberte z množiny $\{(1, 0, 1), (3, 2, 1), (1, 2, 3), (1, 0, -2), (0, 3, -1)\}$ nějakou bázi vektorového prostoru \mathbb{R}^3 a vyjádřete zbylé vektory jako lineární kombinaci vektorů báze.
4. Vyberte z množiny $\{(1, 0, 1, 0), (3, 1, -2, 1), (1, \sqrt{2}, 0, -1), (1, 0, 0, -2), (5, 0, 3, -1)\}$ nějakou bázi vektorového prostoru \mathbb{R}^4 a vyjádřete zbylé vektory jako lineární kombinaci vektorů báze.
5. Je dán rovnoběžnostěn $ABCDEFGH$. Určete souřadnice vrcholů vzhledem k lineární soustavě souřadnic určené repérem \mathcal{R} :
 - a) $\mathcal{R} = \langle A; B - A, D - A, E - A \rangle$
 - b) $\mathcal{R} = \langle F; D - F, G - F, H - F \rangle$
6. Je dán pravidelný čtyřstěn o délce strany $a = 1$. Zvolte vhodně (!) soustavu souřadnic a popište osu mimoběžek $\overline{AD}, \overline{BC}$. Vypočítejte jejich vzdálenost.
7. Zjistěte, který z daných trojúhelníků má všechny vnitřní úhly ostré a který má jeden z vnitřních úhlů tupý:
 - a) $A = [0, -2, 2], B = [-4, 10, -6], C = [-1, 4, -4]$
 - b) $A = [1, 3, 6], B = [-4, 6, -2], C = [3, 6, 0]$
 - c) $A = [3, -1, 2], B = [0, -4, 2], C = [-3, 2, 1]$

8. Na ose z najděte takový bod C , aby body $A = [-4, 1, 7]$, $B = [3, 5, -2]$, C byly vrcholy rovnoramenného trojúhelníku.
9. Najděte bod, který má od čtyř bodů $A = [2, 0, 0]$, $B = [0, 4, 0]$, $C = [0, 0, 6]$, $D = [8, 4, 10]$ stejnou vzdálenost.
10. Čtyřstěn má objem $V = 5$ a tři vrcholy $A = [1, 2, -1]$, $B = [2, 1, 1]$, $C = [1, 0, 3]$. Najděte souřadnice vrcholu D , který leží na ose y .
11. Zjistěte, jestli čtyřúhelník s vrcholmi $A = [5, 2, 6]$, $B = [6, 4, 4]$, $C = [4, 3, 2]$, $D = [3, 1, 4]$ je čtverec.
12. Najděte průmět vektoru $a = (6, 3, 6)$ do osy určené vektorem $b = (-1, 3, 2)$.
13. Vypočítejte obsah trojúhelníku ABC , je-li $A = [3, 1, 4]$, $B = [0, 2, 1]$, $C = [5, 0, 8]$.
14. Najděte objem rovnoběžnostěnu určeného trojicí vektorů a, b, c , platí-li $\|a\| = 2$, $\|b\| = 4$, $\|c\| = 8$ a vektory a, b, c svírají navzájem úhel 60° .
15. Určete všechny vzájemné polohy a) tří přímk b) tří rovin v prostoru (udělejte náčrtek).
16. Určete souřadnice středu kružnice vepsané trojúhelníku $\triangle ABC$, pro $A = [1, \frac{13}{4}]$, $B = [\frac{32}{7}, \frac{4}{7}]$, $C = [2, 4]$.
17. Jsou dány množiny bodů $\mathbf{A} : A[-a, a^2]$ a $\mathbf{B} : B[b, b^2]$ v \mathbb{R} pro $1 < a, b \in \mathbb{Z}$.

a) Najděte množinu \mathbf{P} průsečíků P spojnic \overline{AB} s osou y .

b) Zamyslete (!) se nad y -ovými souřadnicemi bodů P a napište jakou číselnou množinu popisují.

18. V \mathbb{E}^3 jsou dány roviny:

$$\beta : 5x - 2y + 5z - 10 = 0$$

$$\gamma : x - 4y - 8z + 12 = 0.$$

a) Určete rovnici roviny α , která je kolmá k rovině β a s rovinou γ svírá úhel 45° .

b) Určete objem jehlanu, jehož boční stěny jsou α, β a γ , které se protínají ve vrcholu V , a pata výšky z vrcholu V na protější stěnu leží v počátku soustavy souřadnic.

19. Přímka a je dána rovnicemi:

$$x - y + z + 2 = 0$$

$$x + y - 3z - 8 = 0.$$

Přímka b je dána rovnicemi:

$$x + y + 3z - 10 = 0$$

$$x - y + 3z - 8 = 0.$$

a) Určete rovnice osy mimoběžek a a b .

b) Určete vzdálenost mimoběžek a a b .

20. a) Určete rovnici roviny ρ v \mathbb{E}^3 , která prochází přímkou p danou bodem $P = (-3, 4, -2)$ a směrovým vektorem $\vec{s}_p = (-3, 1, 1)$ a se souřadnicovou osou y svírá úhel $\sphericalangle(\rho, y) = 45^\circ$.
- b) Určete průnik roviny ρ s rovinou (x, z) .

21. V \mathbb{E}^3 jsou dány roviny:

$$\beta : 5x - 2y + 5z - 10 = 0$$

$$\gamma : x - 4y - 8z + 12 = 0.$$

a) Určete rovnici roviny α , která je kolmá k rovině β a s rovinou γ svírá úhel 45° .

- b) Určete objem jehlanu, jehož boční stěny jsou α, β a γ , které se protínají ve vrcholu V , a pata výšky z vrcholu V na protější stěnu leží v počátku soustavy souřadnic.
22. a) Určete rovnici roviny ρ v \mathbb{E}^3 , která prochází přímkou p danou bodem $P = (-3, 4, -2)$ a směrovým vektorem $\vec{s}_p = (-3, 1, 1)$ a se souřadnicovou osou y svírá úhel $\sphericalangle(\rho, y) = 45^\circ$.
- b) Určete průnik roviny ρ s rovinou (x, z) .
23. a) Napište rovnici roviny σ , která je kolmá na rovinu $\beta : 5x - 2y + 5z - 10 = 0$, svírá úhel 45° s rovinou $\gamma : x - 4y - 8z + 12 = 0$ a prochází počátkem soustavy souřadnic.
- b) Určete obraz roviny σ v rovinové souměrnosti podle roviny $y = 0$.
24. Je dán čtverec $ABCD$ o souřadnicích $A = [1, 1, 0]$; $B = [-1, 1, 0]$; $C = [-1, -1, 0]$, $D = [1, -1, 0]$, který je řezem pravidelného čtyřstěnu $PQRS$ rovinou $z = 0$. Určete souřadnice vrcholů čtyřstěnu a jeho objem.
Pozn. souřadnice stačí určit pro jednu možnost čtyřstěnu.
25. V \mathbb{E}^3 jsou dány přímky $p = \langle P, u \rangle$ a $q = \langle Q, v \rangle$, kde $P = [2, 2, r]$, $r \in \mathbb{R}$, $u = (-2, 3, 1)$; $Q = [4, -1, 3]$, $v = (-1, 2, 1)$.
- a) Určete vzdálenost přímek p, q v závislosti na parametru r .
- b) Určete rovinu ρ nerůznoběžnou s p, q , která má od obou přímek stejnou vzdálenost.

Zobrazení

26. Určete analytické vyjádření a druh afinity, která převádí trojúhelník ABC do trojúhelníku BCA .
($A=[0,0]$; $B=[4,0]$; $C=[0,2]$)
27. Je dáno zobrazení prostoru \mathbb{E}^3 na sebe

$$\begin{aligned} 2x' &= x + y - z \\ y' &= x + z \\ 2z' &= -x + y + z \end{aligned}$$

Určete, typ zobrazení a nalezněte samodružné body a směry tohoto zobrazení.

28. Je dáno podobné zobrazení prostoru \mathbb{E}^3 na sebe

$$\begin{aligned} 7x' &= -4x + 12y - 6z - 51 \\ 7y' &= 12x + 6y + 4z + 27 \\ 7z' &= -6x + 4y + 12z - 24 \end{aligned}$$

Určete, zda se jedná o přímou nebo nepřímou podobnost a nalezněte samodružné body, směry a koeficient podobnosti tohoto zobrazení.

29. Je dáno zobrazení \mathbb{E}^3 na sebe

$$\begin{aligned} 7x' &= 2x - 6y + 3z \\ 7y' &= 3x - 2y - 6z \\ 7z' &= 6x + 3y + 2z. \end{aligned}$$

Určete typ zobrazení a nalezněte obrazy

- a) souřadných rovin (xy, xz, yz)
- b) přímky, která prochází počátkem a bodem $A = [7, 7, 14]$.

30. Je dáno zobrazení \mathbb{E}^3 na sebe

$$\begin{aligned}2x' &= x - \sqrt{3}z \\ y' &= y \\ 2z' &= -\sqrt{3}x - z.\end{aligned}$$

Určete typ zobrazení (afinní/podobné/shodné + případné dourčení) a nalezněte obrazy

- roviny $x + y - z = 0$
- přímky, která prochází počátkem a bodem $A = [1, 0, 1]$.

31. Je dáno zobrazení \mathbb{E}^3 na sebe

$$\begin{aligned}5x' &= 8x - 6y + 6 \\ 5y' &= -6x - 8y - 12 \\ 5z' &= -10z.\end{aligned}$$

Určete typ zobrazení a nalezněte **vzor**

- čtyřúhelníku $A'B'C'D'$, pro $A' = [-10, 0, 0]$, $B' = [6, -12, 0]$, $C' = [6, -12, 20]$, $D'[-10, 0, 20]$
- určete o jaký čtyřúhelník $ABCD$ se jedná v a).

32. Je dána krychle $ABCD A'B'C'D'$, bod O je střed hrany AD , S_1 střed stěny $ABB'A'$, S_2 střed stěny $BCC'B'$ a S střed krychle. Je-li \mathbf{Z}_1 středová souměrnost se středem S_1 , \mathbf{Z}_2 středová souměrnost se středem S_2 , \mathbf{Z}_3 posunutí určené orientovanou úsečkou \overrightarrow{BA} , \mathbf{Z}_4 souměrnost podle roviny S_1S_2S a \mathbf{Z}_5 osová souměrnost s osou SS_2 , určete matici zobrazení \mathbf{Z} , které vznikne složením $\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_3, \mathbf{Z}_4, \mathbf{Z}_5$ v tomto pořadí.

33. Je dáno zobrazení \mathbb{E}^3 na sebe

$$\begin{aligned}3x' &= 2x + 2y - z + 3 \\ 3y' &= -x + 2y + 2z - 3 \\ 3z' &= 2x - y + 2z + 6.\end{aligned}$$

- Určete typ (afinní/podobné/shodné + případné dourčení) a samodružné body a směry tohoto zobrazení.
- V rovině dané rovnicí $x + y + z + 1 = 0$ zvolte libovolné dva různé body $A \neq B$, určete jejich obrazy A', B' a spočítejte odchylku vektorů \overrightarrow{AB} a $\overrightarrow{A'B'}$.
- Existuje v prostoru přímka, jejíž obraz bude rovnoběžný se vzorem? Jestli ano napište její libovolné analytické vyjádření.

34. Je dáno zobrazení \mathbb{E}^3 na sebe

$$\begin{aligned}9x' &= 4x + y + 8z - 3 \\ 9y' &= 7x + 4y - 4z + 2 \\ 9z' &= 4x - 8y - z + 9.\end{aligned}$$

- Určete typ (afinní/podobné/shodné + případné dourčení) a samodružné body a směry tohoto zobrazení.
- Určete obraz vrcholů čtyřstěnu, jehož vrcholy jsou body $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ a obraz výšky čtyřstěnu procházející vrcholem $(0, 0, 0)$.
- Určete objem zobrazeného čtyřstěnu.

35. Je dáno zobrazení \mathbb{E}^3 na sebe

$$x' = -2x - 2y + 2z + 1$$

$$y' = 2x + 3y - 3z$$

$$z' = y - z + 4.$$

- a) Určete typ (afinní/podobné/shodné + případné dourčení) a samodružné body a směry tohoto zobrazení.
 b) Určete na jaký útvar se zobrazí jednotková krychle, jejíž vrcholy jsou body
 $A = [0, 0, 0], B = [1, 0, 0], C = [1, 1, 0], D = [0, 1, 0], E = [0, 0, 1], F = [1, 0, 1], G = [1, 1, 1], H = [0, 1, 1]$.
 c) Určete obsah plochy ohraničující zobrazenou krychli.

36. Najděte analytické vyjádření souměrnosti prostoru \mathbb{E}^3 podle přímky p se směrovým vektorem $\vec{s}_p = (0, 3, 1)$ a procházející bodem $B = [1, -2, 0]$.

37. Je dáno zobrazení \mathbb{E}^3 na sebe

$$3x' = 2x + 2y - z + 3$$

$$3y' = -x + 2y + 2z - 3$$

$$3z' = 2x - y + 2z + 6.$$

- a) Určete typ (afinní/podobné/shodné + případné dourčení) a samodružné body a směry tohoto zobrazení.
 b) V rovině dané rovnicí $x + y + z + 1 = 0$ zvolte libovolné dva různé body $A \neq B$, určete jejich obrazy A', B' a spočítejte odchylku vektorů \vec{AB} a $\vec{A'B'}$.
 c) Existuje v prostoru přímka, jejíž obraz bude rovnoběžný se vzorem? Jestli ano napište její libovolné analytické vyjádření.

38. Je dáno zobrazení \mathbb{E}^3 na sebe

$$9x' = 4x + y + 8z - 3$$

$$9y' = 7x + 4y - 4z + 2$$

$$9z' = 4x - 8y - z + 9.$$

- a) Určete typ (afinní/podobné/shodné + případné dourčení) a samodružné body a směry tohoto zobrazení.
 b) Určete obraz vrcholů čtyřstěnu, jehož vrcholy jsou body $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ a obraz výšky čtyřstěnu procházející vrcholem $(0, 0, 0)$.
 c) Určete objem zobrazeného čtyřstěnu.

39. Je dáno zobrazení \mathbb{E}^3 na sebe

$$x' = -2x - 2y + 2z + 1$$

$$y' = 2x + 3y - 3z$$

$$z' = y - z + 4.$$

- a) Určete typ (afinní/podobné/shodné + případné dourčení) a samodružné body a směry tohoto zobrazení.
 b) Určete na jaký útvar se zobrazí jednotková krychle, jejíž vrcholy jsou body
 $A = [0, 0, 0], B = [1, 0, 0], C = [1, 1, 0], D = [0, 1, 0], E = [0, 0, 1], F = [1, 0, 1], G = [1, 1, 1], H = [0, 1, 1]$.
 c) Určete obsah plochy ohraničující zobrazenou krychli.

40. Je dáno zobrazení \mathbb{A}^3 na sebe

$$7x' = x + 3\sqrt{2}y - 6\sqrt{2}z$$

$$7y' = 3\sqrt{2}x + 4y + 6z$$

$$7z' = -6\sqrt{2}x + 6y - 5z.$$

- a) Určete typ (afinní/podobné/shodné + případné dourčení podobnosti nebo shodnosti) a samodružné body a směry tohoto zobrazení.
- b) Určete odchylku rovin kolmých k obrazům vektorů $(-\sqrt{2}, 0, 0)$ a $(0, 7, 7)$.
- c) Určete: délku obrazu libovolné jednotkové úsečky, obsah obrazu jednotkového čtverce, objem obrazu jednotkové krychle.

41. Je dáno zobrazení \mathbb{A}^3 na sebe

$$\begin{aligned}x' &= -x + 2 \\2y' &= x - 2z \\z' &= y.\end{aligned}$$

- a) Určete typ (afinní/podobné/shodné + případné dourčení) a samodružné body a směry tohoto zobrazení.
- b) Určete souřadnice obrazu $A'B'C'D'$ čtyřstěnu $ABCD$, pro $A = [0, 0, 0]$, $B = [2, 0, 0]$, $C = [0, 1, 0]$, $D = [2, 0, 1]$
- c) Určete, jak se změní délky hran a objem čtyřstěnu $ABCD$ v daném zobrazení.

V \mathbb{E}^3 je dána rovina $\rho : x - 2z - 1 = 0$ a v ní body $A[3, -1, ?]$, $B[?, -1, 2]$.

- (a) Určete souřadnice vrcholů krychle $ABCDEFGH$ v standardním značení se stěnou $ABCD$ v rovině ρ , přičemž, y -ová souřadnice vrcholu C je větší než y -ová souřadnice A a z -ová souřadnice E je menší než z -ová souřadnice A .
- (b) Napište matici zobrazení, které převede krychli $ABCDEFGH$ do jednotkové krychle (o souřadnicích $A'[0, 0, 0]$, $B'[1, 0, 0]$, $C'[1, 1, 0]$, $D'[0, 1, 0]$, $E'[0, 0, 1]$...) a určete o jaký typ zobrazení jde.