1. Série

1. Určete $\limsup_{n\to\infty} x_n$ a $\liminf_{n\to\infty} x_n$, jestliže

a) $x_n = \dfrac{2n(-1)^n}{n+1} + \sqrt[n]{2}$;

b) $x_n = \dfrac{n^2}{1+n^2} \cos \dfrac{2n\pi}{3}$;

c) $x_n = (1+1/n)^n(-1)^n + \sin \dfrac{n\pi}{4}$.

2. Vyšetřete platnost následujících implikací.

$$a)\quad \limsup_{n\to\infty} a_n < \liminf_{n\to\infty} b_n \Longrightarrow \exists_{n_0}\forall_{n>n_o}\ a_n < b_n.$$

$$b)\quad \liminf_{n\to\infty} a_n < \limsup_{n\to\infty} b_n \Longrightarrow \forall_{n_0}\exists_{n>n_0}\ a_n < b_n.$$

$$c)\quad \limsup_{n\to\infty} a_n < \limsup_{n\to\infty} b_n \Longrightarrow \forall_{n_0}\exists_{n>n_0}\ a_n < b_n.$$

***3.** Nechť (a_n) a (b_n) jsou reálné posloupnosti. Musí vždy platit tyto nerovnosti?

$$\liminf_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n \le \limsup_{n\to\infty} (a_n+b_n) \le \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n \le \liminf_{n\to\infty} (a_n+b_n) \le \liminf_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

****4.** Určete množinu hromadných hodnot posloupností

$$a_n = \sin n\pi x, \qquad b_n = \cos n\pi x$$

v závislosti na $x \in \mathbb{R}$.

V následujících příkladech je vhodné kombinovat L'Hospitalovo pravidlo s „elementárními“ metodami výpočtu limit.

5. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\arcsin x} - \frac{1}{\sin x}\right)$.

6. $\displaystyle\lim_{x\to 0+} x^{(x^x-1)}$.

7. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

8. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$.

9. (Příklad řešený v DI) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right)$.

10. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1} - \sqrt{x^2+x+1}\ \frac{\ln(e^x+x)}{x}\right)$.

***11.** Má funkce $f(x) = \dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x}$ asymptotu v ∞ ?

***12.** Nechť existuje $f''(x) = A \in \mathbb{R}$. Dokažte, že

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+2h) + f(x) - 2f(x+h)}{h^2} = A.$$

13. Nechť funkce f má derivaci na $(0,\infty)$, existuje $\lim_{x\to\infty} f'(x)$ a $y = ax + b$ je rovnicí asymptoty funkce f v ∞. Dokažte, že pak $\lim_{x\to\infty} f'(x) = a$. Lze vynechat předpoklad existence $\lim_{x\to\infty} f'(x)$?

V následujících příkladech vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci uvedených řad.

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right) n^3.$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}.$

***16.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n^2).$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \arcsin\frac{1}{n}.$

18. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} (\ln(\ln n))^{-\ln n}.$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(1/n) - 1/n}{n^\alpha}.$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos 1/n)^\alpha \ln n, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+4i)^n}{a^n n^2}, \quad a \in \mathbb{C}.$

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}},$ $a > 0, b > 0.$

***23.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{cotg}\frac{\pi n}{4n-2} - \sin\frac{\pi n}{2n+1}\right).$

24. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{n(n-1)}.$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2n-\ln n}.$

26. $\dfrac{4}{2} + \dfrac{4\cdot 7}{2\cdot 6} + \dfrac{4\cdot 7\cdot 10}{2\cdot 6\cdot 10} + \dots$

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}.$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1! + \dots + n!}{(2n)!}.$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n, \quad x \in \mathbb{C}.$

30. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}, \quad x \in \mathbb{C}.$

31. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+a^2}), \quad a \in \mathbb{R}.$

32. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{arctg}\left(\frac{100\ln^2 n}{\sqrt{n+1}-\sqrt[3]{n}}\right)$.

***34.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$.

35. Nechť $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2 < \infty$. Dokažte, že řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ absolutně konverguje.

***36.** Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s kladnými členy diverguje. Nechť s_n je částečný součet této řady. Dokažte, že pak

a) řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$ diverguje a

b)** řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(s_n)^2}$ konverguje.

2. Série

37. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}\cdot \operatorname{arctg} n$.

38. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-3)^n}{n}x^n, \quad x\in\mathbb{C}$.

39. $\displaystyle\sum_{n=10}^{\infty} \frac{\sin n}{n+10\sin n}$.

40. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^{10} n}{\sqrt{n}} e^{inx}$, $x\in\mathbb{R}$, $(i^2=-1)$.

41. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(n+\frac{1}{n})}{\ln(\ln n)}$.

42. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos\frac{\pi n^2}{n+1}}{\ln^2 n}$.

43. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$.

44. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right), \quad p>0$.

45. Pomocí Abelovy parciální sumace sečtěte $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,x^k, \quad x\neq 1$.

****46.** Konverguje řada $\sin 1+\sin(\sin 1)+\sin(\sin(\sin 1))+\ldots$?

***47.** Určete hodnoty a svá tvrzení dokažte.

a) $\displaystyle\limsup_{x\to 0}\left(\sin\frac{\pi(x+1)}{x}+\sin\frac{\pi(5x-2)}{2x}\right)$; b) $\displaystyle\liminf_{x\to 0}\left(\sin\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

48. Vyšetřete průběh funkce $y = f(x)$ zadané parametricky rovnicemi

$$x = t^3 + 3t + 1, \quad y = t^3 - 3t + 1.$$

***49.** Vyšetřete průběh funkce $y = f(x)$ zadané parametricky rovnicemi

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t),$$

kde $a > 0$. (Grafem této funkce je tzv. cykloida - křivka, kterou opisuje bod kružnice, která se „kutálí“ po ose x.)

50. Vypočtěte podle Leibnizovy formule:

a) $(x^2 \sin 2x)^{(50)}$; b) $\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{(5)}$.

3. Série

1 Primitivní funkce

Vždy se snažte vypočítat primitivní funkci na maximálních intervalech její existence. (Pokud ve výsledcích tyto maximální intervaly nejsou uvedeny, jsou to maximální intervaly obsažené v definičním oboru uvedené funkce; ta je na každém z nich hledanou primitivní funkcí.)

V následujících úlohách stačí (po vhodných úpravách) použít tabulkové integrály a lineární substituce.

51. $\displaystyle\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}\,dx.$

52. $\displaystyle\int \sqrt{x^6}\,dx.$

53. $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx.$

54. $\displaystyle\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x}\,dx.$

55. $\displaystyle\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}\,dx.$

56. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x\,dx.$

57. $\displaystyle\int \operatorname{cotg}^2 x\,dx.$

58. $\displaystyle\int \frac{dx}{2+3x^2}.$

59. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}.$

60. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos x}.$

61. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x}.$

62. $\displaystyle\int |\cos x|\,dx.$

63. $\int \sin^2 x \, dx.$

64. $\int \cos^4 x \, dx.$

Jednoduché příklady na (první) substituční metodu.

65. $\int \frac{x^2}{\cos^2(x^3)} \, dx.$

66. $\int \frac{x}{1+x^4} \, dx.$

67. $\int \frac{dx}{x \ln x}.$

68. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1} \, dx.$

69. $\int \operatorname{tg} x \, dx.$

70. $\int \operatorname{cotg} x \, dx.$

71. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}.$

72. $\int \frac{dx}{\sin x \cos x}.$

73. $\int \frac{dx}{\sin x}.$

74. $\int \frac{dx}{\cos x}.$

75. Vypočtěte integrály

a) $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2};$ b) $\int \frac{dx}{(x^2-1)^{3/2}};$ c) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}, \quad a < b$

po řadě pomocí substitucí

$x = \operatorname{tg} t, \; x = \frac{1}{\cos t}, \; x = a\cos^2 t + b\sin^2 t.$

76. Vypočtěte integrály $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$

(i) pomocí substitucí $x = \operatorname{tg} t, \; x = \frac{1}{\cos t}$,
(ii) pomocí hyperbolických funkcí.

Příklady na integraci per partes.

77. $\int x^\alpha \ln x \, dx, \; \alpha \neq -1.$

78. $\int \arcsin x \, dx.$

79. $\int x^2 e^{-2x} \, dx.$

80. $\int \operatorname{arctg} x \, dx.$

81. $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx.$

82. $\int e^{\sqrt{x}} \, dx.$

83. $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \, dx.$

84. $\int \frac{\sin x}{e^x} \, dx.$

85. $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx.$

***86.** $\displaystyle\int \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx.$

87. Položme $S_n = \int \sin^n x\,dx$, $C_n = \int \cos^n x\,dx$, $n \in \mathbb{N}$. Odvoďte rekurentní vztah mezi S_{n+2} a S_n a mezi C_{n+2} a C_n.

88. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?

a) Nechť f je lichá funkce na $\mathbb{R}$. Pak každá funkce primitivní k f je sudá.

b) Nechť f je sudá funkce na $\mathbb{R}$. Existuje-li primitivní funkce k f, pak existuje právě jedna lichá primitivní funkce k f.

c) Nechť f je periodická funkce na $\mathbb{R}$. Existuje-li primitivní funkce k f, pak existuje aspoň jedna periodická primitivní funkce k f.

***89.** Nechť funkce f je definovaná na intervalu (a,b), má na něm vlastní nenulovou derivaci a nechť oborem hodnot f je (c,d). Vyjádřete primitivní funkci k f^{-1} na (c,d) pomocí funkce F primitivní k f, racionálních funkcí a funkce f^{-1}.

****90.** Dokažte, že výsledek z předchozí úlohy je správný, i když o f víme pouze to, že je na (a,b) spojitá a ryze monotónní.

Vypočtěte následující primitivní funkce.

91. $\displaystyle\int \frac{x^{14}-x^8-2x^2+1}{x^6+1}\,dx.$

92. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+1}.$

93. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-x+1)^2}.$

94. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+9)^3}.$

95. $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x-1)^{100}}\,dx.$

96. $\displaystyle\int \frac{x^{99}}{x^{50}+1}\,dx.$

97. $\displaystyle\int \frac{dx}{x+\sqrt{1+x+x^2}}.$

98. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}.$

99. (Příklad řešený v K1.)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}.$$

100. (Příklad řešený v K1.)

$$\int \frac{x^2}{2\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

101. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}.$

102. $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx.$

103. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx.$

104. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}.$

105. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt[4]{x^3(5-x)}}\,dx.$

106. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx.$

***107.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}.$

108. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{-\ln^2 x+4\ln x-3}}.$

Příklady na substituce $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $t=\cos x$, $t=\sin x$, $t=\operatorname{tg} x$.

109. $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}.$

110. $\displaystyle\int \frac{dx}{(\sin^2 x+2\cos^2 x)^2}.$

111. $\displaystyle\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}.$

112. $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}\,dx.$

3. Série

113. Kterými body roviny prochází právě jedno maximální řešení rovnice

$$xy'-y=0?$$

114. Najděte všechna maximální řešení rovnice $3y'=5\sqrt[5]{y^2}$, pro která $y(-2)=-1$ a

a) $y(0)=1/2$; b) $y(0)=2$; c) $y(0)=0$.

115. Pro rovnici

$$y'=\frac{\cos x}{e^y}$$

a) najděte maximální řešení s $y(0)=0$;

b) popište množinu bodů roviny, kterými prochází řešení definované na celé přímce.

116. Nalezněte všechna maximální řešení rovnice

$$y'(2-e^x)=-3e^x\operatorname{tg} y\cos^2 y,$$

pro která $y(0)=\pi/4$ a

a) $y(\ln 3)=0$; b) $y(\ln 3)=\pi/4$; c) $y(\ln 3)=\pi/2$.

V následujících příkladech najděte všechna maximální řešení.

117. $y'+2xy=xe^{-x^2}.$

118. $xy'-2y=2x^4.$

4. Série

119. Vypočtěte diferenci $\operatorname{arctg}(1,01) - \pi/4$ s chybou menší než 10^{-4}.

120. Jaké chyby se dopustíme, nahradíme-li diferenci $\sqrt[3]{1,01} - \sqrt[3]{1}$ hodnotou d příslušného diferenciálu (funkce $\sqrt[3]{x}$ v 1)? Určete d a příslušnou chybu c vypočtěte s přesností 10^{-6}.

121. Vypočtěte $\ln(1,1)$ s chybou menší než 10^{-4}.

122. Vypočtěte $\sqrt{e}$ s chybou menší než 10^{-2}.

***123.** Vypočtěte $\sqrt{5}$ s chybou menší než 10^{-3}.

124. (Příklad řešený v K1.) Dokažte, že pro $x \in (-1,0)$ platí

$$\left|\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}\right| < \frac{|x|^3}{3\,(1-|x|)}.$$

Vypočtěte limity

125. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt[3]{1-3x+x^2} - x^2/6}{\sin x - x}.$

126. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left((x^3 - x^2 + \frac{x}{2})\, e^{1/x} - \sqrt{x^6+1}\right).$

****127.** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\operatorname{tg} x) - \operatorname{tg}(\sin x)}{\arcsin(\operatorname{arctg} x) - \operatorname{arctg}(\arcsin x)}.$

128. Nechť $f(x) = \dfrac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}}$. Nalezněte polynom P třetího stupně, pro který

$$f(x) - P(x) = o(x^3), \qquad x \to 0.$$

129. Pomocí předchozí úlohy vypočtěte

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - (1-x)^{-\frac{1}{x}} + e\,x}{e\,x^3}.$$

130. Pro která $C \in \mathbb{R}$ má funkce $f(x) = \cos x - e^{-x^2/2} + Cx^4$ v bodě 0 lokální maximum?

131. Je 0 inflexním bodem funkce

a) $\sin x + \sinh x$; b) $\cos x + \cosh x$?

****132.** Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $f^{(n+1)}(a) \neq 0$. Zdůvodněte, že existuje prstencové okolí P bodu 0 a funkce $\theta(h)$ na P taková, že pro $h \in P$ platí $0 < \theta(h) < 1$ a

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)\,h^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{f^{(n)}(a+\theta(h)h)\,h^n}{n!}.$$

(a) Dokažte, že pro každou takovou funkci θ existuje $\lim_{h\to 0} \theta(h)$, která nezávisí na výběru θ.

(b) Ukažte (pro jednoduchost pro $n = 1$), že může nastat případ, kdy se dvě takové funkce θ_1, θ_2 nerovnají na žádném prstencovém okolí 0.

5. Série

Zjistěte poloměr konvergence následujících mocninných řad a (s výjimkou posledního příkladu) vyšetřete, ve kterých krajních bodech intervalu konvergence řada konverguje.

133. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n}(x+1)^n.$

134. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n.$

135. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!3^{-n^2} x^n.$

136. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}},\ a > 0.$

137. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+(-1)^n)^n}{n} x^n.$

***138.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n (n!)^2}{(2n+1)!} x^n.$

Na intervalu konvergence sečtěte následující mocninné řady.

139. $\displaystyle\frac{x}{1\cdot 2} + \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{x^3}{3\cdot 4} \ldots$

140. $x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \ldots$

141. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}.$

142. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$

143. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n n!} x^n.$

144. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} x^{2n}.$

V následujících příkladech rozviňte funkci f na nějakém okolí nuly do mocninné řady se středem v 0. Určete $f^{(10)}(0)$.

145. $f(x) = e^{-x^2}.$

146. $f(x) = \cos^2 x.$

147. $\displaystyle f(x) = \frac{x}{1+x-2x^2}.$

148. $\displaystyle f(x) = \frac{1}{1+x+x^2+x^3}.$

149. $f(x) = \sin^3 x.$

150. $f(x) = e^x \cos x.$

151. $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{2-2x}{1+4x}.$

152. $f(x) = (1-x)^{-2}.$

153. $f(x) = \ln \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}.$

154. $f(x) = e^{x \cos \alpha} \cos(x \sin \alpha),$
$\alpha \in \mathbb{R}.$

6. Série

155. Nechť $$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}.$$

Existují dvojnásobné (opakované) limity $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)),\quad \lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y))$ a dvojná limita $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

156. Stejnou úlohu řešte pro funkci $f(x,y) = (x+y)\sin\dfrac{1}{x}$ dodefinovanou nulou v bodech $(0,y),\ y \in \mathbb{R}.$

157. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}.$

158. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

159. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}.$

160. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2}.$

161. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2-\cos x - \cos y}{x^2+y^2}.$

***162.** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{\sqrt{x^4+y^6}}.$

163. Lze funkci $\dfrac{\sin xy}{x}$ rozšířit spojitě na celou rovinu?

****164.** Pro které čtveřice $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ kladných čísel existuje $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{|x|^\alpha |y|^\beta}{|x|^\gamma + |y|^\delta}$?

165. Přibližně vypočtěte (nahrazením diference diferenciálem v bodě $(1,1,1)$ vhodné funkce tří proměnných) bez odhadu chyby

$$\frac{1{,}03^2}{\sqrt[3]{0{,}98\,\sqrt[4]{1{,}05}}}.$$

166. Napište rovnici tečné nadroviny ke grafu funkce $f(x,y,z) = x^{y^z}$ v bodě $(x_0, y_0, z_0, t_0) = (2,1,2,2).$

167. Nechť funkce $f(x,y)$ je spojitá v bodě (a,b) a parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$ má konečnou limitu v bodě (a,b). Musí existovat $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$?

168. Ve kterých bodech existují parciální derivace prvního řádu a totální diferenciál funkce f, je-li

a) $f(x,y) = |x|\,|y|$; b) $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$; c) $f(x,y) = \sqrt[5]{x^5 + y^5}$?

169. Ve kterých bodech mají totální diferenciál následující funkce (všechny dodefinované nulou v počátku)? Ve kterých bodech jsou spojité jejich parciální derivace?

a) $f(x,y) = (x^2 + y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$; b) $g(x,y) = e^{-\frac{1}{x^2+y^2+xy}}$;

c)* $h(x,y) = \dfrac{x^2 y(|x| + |y|)}{x^4 + y^2}$.

170. Nechť $f(x,y) = xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $f(0,0) = 0$. Ukažte, že

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

171. Nechť $f(s,t)$ je kladná funkce třídy C^1 na $\mathbb{R}^2$. Vyjádřete parciální derivace 1.řádu funkce g pomocí hodnot funkce f a jejích parciálních derivací, je-li

a) $g(x,y) = f(x,y)^{f(x,y)}$; b) $h(x,y) = f(x,y)^{f(y,x)}$.

172. Nechť f má totální diferenciál v bodě $(1,1)$ a $g(t,u) = f(f(u,t), f(t,u))$. Vypočtěte $g_1'(1,1)$, je-li $f(1,1) = f_1'(1,1) = 1$, $f_2'(1,1) = 2$.

173. Nechť $f(r,\alpha) = g(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$, funkce g má totální diferenciál v bodě $(1,1)$, $\dfrac{\partial f}{\partial r}(\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{4}) = 0$ a $\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}(\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{4}) = 4$. Vypočtěte $g_1'(1,1)$ a $g_2'(1,1)$.

7. Série

174. Vypočtěte směrovou derivaci $\partial_v f(1,1,2)$ pro funkci $f(x,y,z) = x^y + y^z$ a $v = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

175. Dokažte, že existuje eukleidovské okolí V bodu $(1,1)$ takové, že množina

$$\{(x,y):\ x^3 + y^3 - 2xy = 0\}\ \cap V$$

je grafem nějaké funkce f, která je třídy C^2 na nějakém okolí bodu 1. Spočtěte $f'(1)$ a $f''(1)$.

176. Dokažte, že množina
$$\{(x,y):\ e^y + \ln x + xy \ = \ 0\}$$
je grafem nějaké funkce f, která je třídy C^2 na $(0,\infty)$. Dále

a) vypočtěte nulový bod x_0 funkce f a $f'(x_0)$;

b)* vypočtěte limity f v nekonečnu a v nule zprava;

c)* dokažte, že f nabývá absolutního minima právě v jednom bodě.

177. Uvažujme (Descartesův list) $D = \{(x,y):\ x^3 + y^3 - 2xy = 0\}$. Dokažte toto:

a) $D \cap \{(x,y) : x < 0\}$ je grafem funkce f, která je třídy C^∞ na $(-\infty, 0)$;

b)* f je klesající a $H_f = (0,\infty)$;

c) existuje $a > 0$, pro které je množina $D \cap \{(x,y) : x \geq 0\}$ sjednocením grafů tří funkcí f_1, f_2, f_3 takových, že f_1 je definovaná na $[0,\infty)$, f_2 a f_3 na $[0,a]$ a $f_1 < f_2 \leq f_3$ na $(0,a]$;

d) funkce f_1, f_2, f_3 jsou jednoznačně určeny a každá je třídy C^∞ na vnitřku svého definičního oboru.

Dále

e)* dokažte, že f_1, f_2, f_3 jsou spojité a vyšetřete jejich suprema a infima.

178. Dokažte, že existuje eukleidovské okolí V bodu $(3,-2,2)$ takové, že množina
$$\{(x,y,z) \in V : z^3 - xz + y = 0\}$$
je grafem nějaké funkce $z = z(x,y)$. Vypočtěte tečnou rovinu ke grafu funkce z v bodě $(3,-2,2)$ a $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(3,-2)$.

179. Nechť funkce $z = z(x,y)$ je třídy C^1 na nějakém otevřeném okolí U bodu (x_0,y_0) a splňuje na něm rovnici
$$z = x + \operatorname{arctg} \frac{y}{z-x}.$$

(a) Vyjádřete $\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)$ pomocí $x, y, z(x,y)$ na U.

(b)* Dokažte, že pro každý bod (x_0,y_0), $y_0 > 0$, existuje U a $z(x,y)$ s výše uvedenými vlastnostmi.

***180.** Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$ je jednoduchý kořen rovnice n-tého stupně
$$P(x) = a_0^* x^n + a_1^* x^{n-1} + \cdots + a_n^* = 0, \quad a_i^* \in \mathbb{R}.$$
Dokažte, že existují $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ taková, že pokud
$$|a_i - a_i^*| < \delta, \quad i = 1, \ldots, n,$$
pak má rovnice $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ v $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ právě jeden kořen $x = x(a_1, \ldots, a_n)$. Vypočtěte $\frac{\partial x}{\partial a_i}(a_1^*, \ldots, a_n^*)$.

***181.** Na základě předchozího příkladu vypočtěte přibližně (bez odhadu chyby) kořen rovnice

$$0,99\,x^3 + 1,02\,x - 10 = 0.$$