

## Požadavky ke zkoušce z matematické analýzy, ZS 2013–2014

De Morganova pravidla, relace, zobrazení (základní pojmy), supremum a infimum v lineárně uspořádané množině. Množiny stejné mohutnosti. Definice a základní vlastnosti spočetných množin.

Uspořádané těleso, archimédovské těleso, těleso reálných čísel, Bernoulliho nerovnost, hustota racionálních a iracionálních čísel v  $\mathbb{R}$ .

Limita posloupnosti–jednoznačnost, vztah k omezenosti, nezávislost na posunu indexu a změně konečného počtu členů. Limita vybrané posloupnosti. Věta o srovnání s geometrickou posloupností (na základě odhadu  $a_{n+1}/a_n$ ). Nevlastní limity. Uspořádání, operace a existence suprema a infima v  $\mathbb{R}^*$ . Vztah limity a operací. Vztah limity a nerovností. Limita monotónní posloupnosti. Definice čísla  $e$ . Limita komplexní posloupnosti. Pojem součtu nekonečné řady a hodnoty nekonečného součinu.

Princip vložených intervalů. (Heine-)Borelova pokrývací věta. Definice a charakterizace hromadných hodnot posloupnosti. Bolzano-Weierstrassova věta. Limes superior a limes inferior posloupnosti–vztah k existenci limity. Nutnost a postačitelnost Bolzano-Cauchyovy podmínky pro posloupnosti reálných a komplexních čísel.

Součet geometrické řady. Základní nutná podmínka pro konvergenci řady. Bolzano-Cauchyova podmínka pro řady komplexních čísel, vztah konvergence a absolutní konvergence řady. Divergence harmonické řady. Srovnávací a limitní srovnávací kritérium. Odmocninové (Cauchyovo) a limitní odmocninové kritérium. Podílové (d'Alembertovo) a limitní podílové kritérium. Věta o zbytku řady. Uzávorkování řady. Kondenzační kritérium - aplikace na řady  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  a  $\sum \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ . Leibnizovo kritérium, Dirichletovo a Abelovo kritérium (v rozsahu probraném na přednášce).

Spojitosť a limita funkce–vztah k lokální omezenosti. Jednostranná spojitost, klasifikace bodů nespojitosti. Okolí a prstencové okolí–definice všech druhů limit. Heineho věta (varianty pro limitu a spojitost). Vlastnosti limity funkce–jednoznačnost, operace, nerovnosti. Spojitost a operace. Různé varianty věty o limitě složené funkce. Spojitost složené funkce v bodě a v intervalu. Geometrické odvození  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x/x$ . Limita a druhy nespojitosti monotónní funkce.

Derivace–definice, geometrická a fyzikální interpretace. Vztah derivace, jednostranných derivací a spojitosti. Derivace a algebraické operace. Derivace složené a inverzní funkce. Znalost derivací elementárních funkcí s důkazem. Věta o asymptotě.

Bolzanova věta a Darbouxova vlastnost spojitých funkcí. Věta o spojitosti inverzní funkce. Zavedení  $n$ -té odmocniny. Axiomatické zavedení goniometrických funkcí–odvození derivací. Definice a základní vlastnosti cyklometrických funkcí. Axiomatická definice exponenciály–odvození základních vlastností. Přirozený logaritmus. Exponenciální funkce o základu  $a$ . Mocninná funkce. Limita  $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln^\beta x/x^\alpha$ .

Lokální extrémů a monotonie v bodě–vztah k derivaci, Fermatova věta. Nabývání extrémů spojitě funkce na intervalu. Konvexní podmnožiny reálné přímky. Spojitý obraz intervalu. Rolleova věta. Lagrangeova a Cauchyova věta o střední hodnotě. Počítání derivace jako limity derivace. L' Hospitalova pravidla. Vztah derivace a monotonie. Základní vlastnosti konvexních a konkávních funkcí (spojitosť, existence jednostranných derivací, vzájemná poloha tečny a grafu funkce). Vztah konvexnosti k derivaci a druhé derivaci. Inflexní bod funkce. Vztah druhé derivace a lokálních extrémů.

V početní části písemné práce mohou být příklady na probranou a procvičenou látku (které lze řešit metodami pokrytými Doporučenými úlohami a Ukázkovými příklady), zejména:

limity posloupností (také rekurentně zadaných) a funkcí, vyšetřování průběhu funkce, výpočty (jednostranných) derivací, tečen a asymptot, vyšetřování konvergence řad (nebudou tam příklady na použití Leibnizova, Dirichletova a Abelova kritéria).

Při vyšetřování průběhu funkce je velmi důležitou částí řešení náčrt grafu funkce, pokud jsou vlastnosti funkce vyšetřeny správně, ale náčrt chybí nebo je nesprávný, může být zisk bodů jen poloviční. (Proto je velmi vhodné při přípravě vyšetřit několik průběhů zcela samostatně.)

V teoretické části písemné práce bude prověřována znalost definic, znění vět a důkazů (které byly na přednášce) a příkladů, které byly na přednášce. I vynechání jednoho předpokladu je hrubá chyba, proto je velmi vhodné si před zkouškou písemně ověřit svou znalost definic a vět.

Na případné ústní části bude zkoušena většinou teoretická látka, výjimečně ale také znalost početních metod. Je dosti pravděpodobné, že padnou i otázky týkající se písemky, např. nejasných řešení, za které jste získali tzv. “nečisté body”.

L. Zajíček