

Každá z částí se řeší během 90 min, s asi 15 minutovou přestávkou.
K bodům za každou část se přičítá polovina bonusových bodů.

Početní část

Příklad 1

a) Spočtěte (pokud existuje) limitu posloupnosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(1 - \cos \frac{2}{n})}{\log(\frac{n+1}{n}) - \log(\frac{n+2}{n})}.$$

Svůj postup stručně vysvětlete.
(4 body)

b) Spočtěte (pokud existuje) limitu funkce

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \arctg(\sqrt{x^5} - \sqrt{x^3} - x^2 \log x) \cdot \log(\operatorname{arccotg} x).$$

Svůj postup stručně vysvětlete.
(4 body)

Příklad 2

Nechť posloupnost (a_n) je definovaná rovnostmi

$$a_1 = 1/2, \quad a_{n+1} = 2a_n - (a_n)^2.$$

Dokažte, že existuje limita $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ a spočtěte ji. Své úvahy srozumitelně vysvětlete.

(4 body)

Příklad 3 Vyšetřete průběh funkce zadané předpisem

$$f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{x}{x+1} \quad (x \neq -1), \quad f(-1) = \pi.$$

Podstatnou součástí řešení je náčrt grafu, který souhlasí s vašimi závěry, které ovšem musí být podloženy výpočtem.

(Nezapomeňte vyšetřit též jednostranné derivace, lokální extrémy, obor hodnot, konvexitu, asymptoty atd. a své závěry napsat.)

(6 bodů)

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:

- dosažení aspoň **8** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení aspoň **19** bodů z obou částí dohromady.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:

- dosažení aspoň **11** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení aspoň **25** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **4** bodů z důkazové úlohy D1 nebo z úlohy D2

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:

- dosažení aspoň **13** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení aspoň **30** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **4** bodů z důkazové úlohy D2

Teoretická část

Úloha A

- (a) Napište definici výroku " f má ostré lokální maximum v bodě 1".
(b) Napište znění Heineho věty o souvislosti limity funkce a limit posloupností.
(4 body)

Úloha B Spočtěte limitu $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{tg} \left(\frac{\sin x}{x} \right)$. Napište znění obecných vět, které jste při výpočtu použili, a *podrobně* vysvětlete jak (napište, co je f , a , atd. a ověřte předpoklady). (Limitu $\lim_{x \rightarrow \infty} 1/x$ nezdůvodňujte.)

(4 body)

Úloha C Nechť f je ryze konvexní na \mathbb{R} , $f(0) = -1$, $f(1) = 0$. Dokažte, že $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

Napište znění obecných vět, které jste při výpočtu použili, a vysvětlete jak.

(4 body)

Úloha D1 Zformulujte a dokažte věty o vlastní limitě součinu a podílu posloupností. Používáte-li nějaká tvrzení z přednášky, přesně je zformulujte bez důkazu.

(6 bodů)

Úloha D2 Zformulujte a dokažte větu o existenci limes superior posloupnosti. Používáte-li nějaká tvrzení z přednášky, přesně je zformulujte bez důkazu.

(6 bodů)

(Body z D1 a D2 se nesčítají, počítá se lepší varianta.)

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:

- dosažení aspoň **8** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení aspoň **19** bodů z obou částí dohromady.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:

- dosažení aspoň **11** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení aspoň **25** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **4** bodů z důkazové úlohy D1 nebo z úlohy D2

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:

- dosažení aspoň **13** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení aspoň **30** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **4** bodů z důkazové úlohy D2