1 Doporučené ulohy – 1. série

V následujících příkladech vyšetřete konvergenci uvedených řad.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+a^2}), \quad a \in \mathbb{R}.$

2. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}.$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{arctg}\left(\frac{100\ln^2 n}{\sqrt{n+1}-\sqrt[3]{n}}\right).$

***4.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}.$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} \cdot \operatorname{arctg} n.$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-3)^n}{n} x^n, \quad x \in \mathbb{C}.$

7. $\displaystyle\sum_{n=10}^{\infty} \frac{\sin n}{n+10\sin n}.$

8. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^{10} n}{\sqrt{n}} e^{inx},$
$x \in \mathbb{R},\ (i^2=-1).$

9. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(n+\frac{1}{n})}{\ln(\ln n)}.$

10. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos\frac{\pi n^2}{n+1}}{\ln^2 n}.$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}.$

12. Pomocí Abelovy parciální sumace sečtěte $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,x^k, \quad x \neq 1.$

2 Doporučené ulohy – 2. série

Vždy se snažte vypočítat primitivní funkci na maximálních intervalech její existence.

V následujících úlohách stačí (po vhodných úpravách) použít tabulkové integrály a lineární substituce.

13. $\displaystyle\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}\,dx.$

14. $\displaystyle\int \sqrt{x^6}\,dx.$

15. $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx.$

16. $\displaystyle\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}\,dx.$

17. $\displaystyle\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}\,dx.$

18. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x\,dx.$

19. $\displaystyle\int \operatorname{cotg}^2 x\,dx.$

20. $\displaystyle\int \frac{dx}{2+3x^2}.$

21. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}.$

22. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos x}.$

23. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x}.$

24. $\displaystyle\int |\cos x|\,dx.$

25. $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx.$

26. $\displaystyle\int \cos^4 x\,dx.$

Jednoduché příklady na (první) substituční metodu.

27. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\cos^2(x^3)}\,dx.$

28. $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,dx.$

29. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x}.$

30. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1}\,dx.$

31. $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx.$

32. $\displaystyle\int \operatorname{cotg} x\,dx.$

33. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x+2\cos^2 x}.$

34. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x\cos x}.$

35. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}.$

36. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}.$

37. Vypočtěte integrály

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$; b) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-1)^{3/2}}$; c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$, $a<b$

po řadě pomocí substitucí

$x = \operatorname{tg} t,\ x = \dfrac{1}{\cos t},\ x = a\cos^2 t + b\sin^2 t.$

38. Vypočtěte integrály $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$, $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$

(i) pomocí substitucí $x = \operatorname{tg} t,\ x = \frac{1}{\cos t}$,

(ii) pomocí hyperbolických funkcí.

Příklady na integraci per partes.

39. $\displaystyle\int x^\alpha \ln x\,dx,\ \alpha \neq -1.$

40. $\displaystyle\int \arcsin x\,dx.$

41. $\displaystyle\int x^2 e^{-2x}\,dx.$

42. $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x\,dx.$

43. $\displaystyle\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx.$

44. $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\,dx.$

45. $\displaystyle\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx.$

46. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{e^x}\,dx.$

47. $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx.$

***48.** $\displaystyle\int \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx.$

49. Položme $S_n = \displaystyle\int \sin^n x\,dx$, $C_n = \displaystyle\int \cos^n x\,dx$, $n \in \mathbb{N}$. Odvoďte rekurentní vztah mezi S_{n+2} a S_n a mezi C_{n+2} a C_n.

50. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?

a) Nechť f je lichá funkce na $\mathbb{R}$. Pak každá funkce primitivní k f je sudá.

b) Nechť f je sudá funkce na $\mathbb{R}$. Existuje-li primitivní funkce k f, pak existuje právě jedna lichá primitivní funkce k f.

c) Nechť f je periodická funkce na $\mathbb{R}$. Existuje-li primitivní funkce k f, pak existuje aspoň jedna periodická primitivní funkce k f.

***51.** Nechť funkce f je definovaná na intervalu (a,b), má na něm vlastní nenulovou derivaci a nechť oborem hodnot f je (c,d). Vyjádřete primitivní funkci k f^{-1} na (c,d) pomocí funkce F primitivní k f, racionálních funkcí a funkce f^{-1}.

****52.** (Problémek 3)

Dokažte, že výsledek z předchozí úlohy je správný, i když o f víme pouze to, že je na (a,b) spojitá a ryze monotónní.

Vypočtěte následující primitivní funkce.

53. $\displaystyle\int \frac{x^{14}-x^8-2x^2+1}{x^6+1}\,dx.$

54. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+1}.$

55. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-x+1)^2}.$

56. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+9)^3}.$

57. $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x-1)^{100}}\,dx.$

58. $\displaystyle\int \frac{x^{99}}{x^{50}+1}\,dx.$

59. $\displaystyle\int \frac{dx}{x+\sqrt{1+x+x^2}}.$

60. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}.$

61. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}.$

62. $\displaystyle\int \frac{x^2}{2\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

63. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}.$

64. $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx.$

65. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx.$

66. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}.$

67. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt[4]{x^3(5-x)}}\,dx.$

68. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx.$

***69.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}.$

70. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{-\ln^2 x+4\ln x-3}}.$

Příklady na substituce $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2},\ t=\cos x,\ t=\sin x,\ t=\operatorname{tg} x.$

71. $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}.$

72. $\displaystyle\int \frac{dx}{(\sin^2 x+2\cos^2 x)^2}.$

73. $\displaystyle\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}.$

74. $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}\,dx.$

3 Doporučené ulohy – 3. série

75. Vypočtěte diferenci $\operatorname{arctg}(1,01) - \pi/4$ s chybou menší než 10^{-4}.

76. Jaké chyby se dopustíme, nahradíme-li diferenci $\sqrt[3]{1,01} - \sqrt[3]{1}$ hodnotou d příslušného diferenciálu (funkce $\sqrt[3]{x}$ v 1)? Určete d a příslušnou chybu c vypočtěte s přesností 10^{-6}.

77. Vypočtěte $\ln(1,1)$ s chybou menší než 10^{-4}.

78. Vypočtěte $\sqrt{e}$ s chybou menší než 10^{-2}.

***79.** Vypočtěte $\sqrt{5}$ s chybou menší než 10^{-3}.

80. Dokažte, že pro $x \in (-1, 0)$ platí

$$\left|\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}\right| < \frac{|x|^3}{(1-|x|)}.$$

Vypočtěte limity

81. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt[3]{1-3x+x^2} - x^2/6}{\sin x - x}.$

82. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left((x^3 - x^2 + \frac{x}{2})\, e^{1/x} - \sqrt{x^6+1}\right).$

****83.** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\operatorname{tg} x) - \operatorname{tg}(\sin x)}{\arcsin(\operatorname{arctg} x) - \operatorname{arctg}(\arcsin x)}.$

84. Nechť $f(x) = \dfrac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}}$. Nalezněte polynom P třetího stupně, pro který

$$f(x) - P(x) = o(x^3), \qquad x \to 0.$$

85. Pomocí předchozí úlohy vypočtěte

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - (1-x)^{-\frac{1}{x}} + e\,x}{e\,x^3}.$$

86. Pro která $C \in \mathbb{R}$ má funkce $f(x) = \cos x - e^{-x^2/2} + Cx^4$ v bodě 0 lokální maximum?

****87.** (Problémek č. 4)

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $f^{(n+1)}(a) \neq 0$. Zdůvodněte, že existuje prstencové okolí P bodu 0 a funkce $\theta(h)$ na P taková, že pro $h \in P$ platí $0 < \theta(h) < 1$ a

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)\,h^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{f^{(n)}(a+\theta(h)h)\,h^n}{n!}.$$

(a) Dokažte, že pro každou takovou funkci θ existuje $\lim_{h\to 0}\theta(h)$, která nezávisí na výběru θ.

(b) Ukažte (pro jednoduchost pro $n = 1$), že může nastat případ, kdy se dvě takové funkce θ_1, θ_2 nerovnají na žádném prstencovém okolí 0.

4 Doporučené ulohy – 4. série

Zjistěte poloměr konvergence následujících mocninných řad a vyšetřete, ve kterých krajních bodech intervalu konvergence řada konverguje. (V příkladu s hvězdičkou je obtížné pouze vyšetřit konvergenci v krajních bodech.)

88. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n}(x+1)^n.$

89. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n.$

90. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!3^{-n^2} x^n.$

91. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}},\ a > 0.$

92. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+(-1)^n)^n}{n} x^n.$

***93.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n (n!)^2}{(2n+1)!} x^n.$

Na intervalu konvergence sečtěte následující mocninné řady.

94. $\displaystyle\frac{x}{1\cdot 2} + \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{x^3}{3\cdot 4} \dots$

95. $x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \dots$

96. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}.$

97. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$

98. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n n!} x^n.$

99. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} x^{2n}.$

V následujících příkladech rozviňte funkci f na nějakém okolí nuly do mocninné řady se středem v 0. Určete $f^{(10)}(0)$.

100. $f(x) = e^{-x^2}$.

101. $f(x) = \cos^2 x$.

102. $f(x) = \dfrac{x}{1 + x - 2x^2}$.

103. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x + x^2 + x^3}$.

104. $f(x) = \sin^3 x$.

105. $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{2 - 2x}{1 + 4x}$.

106. $f(x) = (1 - x)^{-2}$.

107. $f(x) = \ln \sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}$.

5 Doporučené ulohy – 5. série

108. Pomocí teorie Riemannova integrálu a Newton – Leibnizovy formule vypočtěte

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{n^2 + 1^2} + \dfrac{n}{n^2 + 2^2} + \dots + \dfrac{n}{n^2 + n^2} \right)$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^p + 2^p + \dots n^p}{n^{p+1}}, \quad p > 0$.

109. Spočtěte $\displaystyle\int_0^{10\pi} \frac{dx}{1 + \cos^2 x}$.

110. Spočtěte $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3x + 1}}$.

111. Nechť f je spojitá funkce na $[0, 1]$ a $0 < a < b$. Vypočtěte

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(x)}{x}\, dx.$$

Vyšetřete konvergenci (čili existenci) a případně i absolutní konvergenci následujících Newtonových integrálů.

112. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1 - x^2}\, dx$.

113. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{1 + x^2}\, dx$.

114. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x - \sin x}{x^p}\, dx$.

115. $\displaystyle\int_7^\infty \frac{\ln(1 + x)}{x\sqrt{x}}\, dx$.

116. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^p x \cos^q x \; dx,$
$p, q \in \mathbb{R}.$

117. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(\frac{1}{x}) \operatorname{arctg} x}{x} \; dx.$

118. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}, \; p, q \in \mathbb{R}.$

119. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos x) \; \operatorname{tg}^p x \; dx.$

120. $\displaystyle\int_0^{\infty} (\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}) \, x^{-a} \; dx,$
$a \in \mathbb{R}.$

121. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}} \; dx.$

122. $\displaystyle\int_0^{\infty} u \cos u^4 \; du.$

123. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^a} \; dx, \quad a \in \mathbb{R}.$

***124.** $\displaystyle\int_1^{\infty} x^p \sin(x + \ln x) \; dx.$

****125.** $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + x^a \sin^2 x}, \; a \in \mathbb{R}$

126. $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}, \; p, q \in \mathbb{R}.$

127. $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{\sin x}{x + 2 \sin x} \; dx.$

128. $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{(3e^{\frac{1}{x}} - 3e^{-\frac{1}{x}} - 6 \sin \frac{1}{x} - \frac{2}{x^3}) \, x^6}{\ln^2 x} \; dx.$

129. $\displaystyle\int_2^{\infty} \left(\ln(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3} \right) \frac{x^4}{\ln x} \; dx.$

130. Dokažte, že $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) \; dx = -\frac{\pi \ln 2}{2}.$

Návod:
(a) Použijte substituci $x = 2t$.
(b) $\ln(\sin 2t)$ napište přirozeně jako součet tří členů.
(c) $\int_0^{\pi/4} \ln(\cos t) \; dt$ počítejte pomocí substituce $t = \pi/2 - u$.

131. Pomocí výsledku předchozího příkladu vypočtěte integrály

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\operatorname{tg} x} \; dx, \qquad \int_0^1 \frac{\arcsin x}{x} \; dx, \qquad \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1 - x^2}} \; dx.$$

132. Vypočtěte derivaci funkce $\displaystyle g(x) = \int_0^{\sqrt{x}} e^{t^2} \; dt.$

133. Dokažte, že $\displaystyle\int_0^x e^{t^2} \; dt \sim \frac{1}{2x} e^{x^2}, \quad x \to \infty.$

***134.** Nechť f je nerostoucí spojitá funkce na intervalu $[1, \infty)$ a nechť konverguje $\int_0^\infty f(x)\,dx$. Dokažte, že pak $f(x) = o(1/x)$, $x \to \infty$.

Následující dva důležité příklady jsou řešeny v JI.

135. Vypočtěte $$I_n := \int_0^{\pi/2} \sin^n x \; dx \qquad \text{pro} \quad n = 0, 1, \dots$$
Návod: za užití integrace per partes odvoďte vztah mezi I_n a I_{n+2}.

***136.** Pomocí výsledku předchozího příkladu a nerovností $I_{2n+1} < I_{2n} < I_{2n-1}$ dokažte Wallisův vzorec
$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}.$$

6 Doporučené ulohy – 6. série

137. Nechť $$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}.$$
Existují dvojnásobné (opakované) limity $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y))$, $\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y))$ a dvojná limita $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

138. Stejnou úlohu řešte pro funkci $f(x,y) = (x+y)\sin\dfrac{1}{x}$ dodefinovanou nulou v bodech $(0,y)$, $y \in \mathbb{R}$.

139. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

140. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

141. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$.

142. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

143. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2-\cos x - \cos y}{x^2+y^2}$.

***144.** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{\sqrt{x^4+y^6}}$.

145. Lze funkci $\dfrac{\sin xy}{x}$ rozšířit spojitě na celou rovinu?

****146.** Pro které čtveřice $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ kladných čísel existuje $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{|x|^\alpha |y|^\beta}{|x|^\gamma + |y|^\delta}$?

147. Přibližně vypočtěte (nahrazením diference diferenciálem v bodě $(1,1,1)$ vhodné funkce tří proměnných) bez odhadu chyby

$$\frac{1,03^2}{\sqrt[3]{0,98\,\sqrt[4]{1,05}}}.$$

148. Napište rovnici tečné nadroviny ke grafu funkce $f(x,y,z) = x^{y^z}$ v bodě $(x_0, y_0, z_0, t_0) = (2,1,2,2)$.

149. Nechť funkce $f(x,y)$ je spojitá v bodě (a,b) a parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$ má konečnou limitu v bodě (a,b). Musí existovat $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$?

150. Ve kterých bodech existují parciální derivace prvního řádu a totální diferenciál funkce f, je-li

a) $f(x,y) = |x|\,|y|$; b) $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$; c) $f(x,y) = \sqrt[5]{x^5 + y^5}$?

151. Ve kterých bodech mají totální diferenciál následující funkce (všechny dodefinované nulou v počátku)? Ve kterých bodech jsou spojité jejich parciální derivace?

a) $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$; b) $g(x,y) = e^{-\frac{1}{x^2+y^2+xy}}$;

c)* $h(x,y) = \dfrac{x^2 y(|x|+|y|)}{x^4+y^2}$.

152. Nechť $f(s,t)$ je kladná funkce třídy C^1 na $\mathbb{R}^2$. Vyjádřete parciální derivace 1.řádu funkce g pomocí hodnot funkce f a jejích parciálních derivací, je-li

a) $g(x,y) = f(x,y)^{f(x,y)}$; b) $h(x,y) = f(x,y)^{f(y,x)}$.

153. Nechť f má totální diferenciál v bodě $(1,1)$ a $g(t,u) = f(f(u,t), f(t,u))$. Vypočtěte $g_1'(1,1)$, je-li $f(1,1) = f_1'(1,1) = 1$, $f_2'(1,1) = 2$.

154. Nechť $f(r,\alpha) = g(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$, funkce g má totální diferenciál v bodě $(1,1)$, $\dfrac{\partial f}{\partial r}(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}) = 0$ a $\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}) = 4$. Vypočtěte $g_1'(1,1)$ a $g_2'(1,1)$.