Požadavky ke zkoušce z MA 3. semestr

Zkoušet se bude látka odpřednesená na přednášce (ve stejném rozsahu), zejména:

Věta o přírustku funkce. Skládání funkcí a zobrazení třídy C^p. Věta o implicitně zadané funkci s důkazem. Věta o implicitních funkcích (bez důkazu, jen znalost strategie klasického důkazu). Věta o inverzním zobrazení (bez důkazu). Regulární zobrazení a difeomorfismus - jejich vztah. Zavádění křivočarých souřadnic, polární souřadnice. Dvojná a dvojnásobná limita, záměnnost parciálních derivací.

Nutné podmínky pro lokální a lokální vázané (bez důkazu) extrémy funkcí více proměnných (Lagrangeovy multiplikátory). Diferenciál a derivace k-tého řádu. Taylorův polynom; Taylorova věta s Lagrangeovým a Peanovým tvarem zbytku pro funkce více proměnných. Souvislost druhého diferenciálu a lokálních extrémů.

Bodová, stejnoměrná a lokálně stejnoměrná konvergence posloupností a řad (reálných či komplexních) funkcí.Vztah ke konvergenci v $C[a,b]$. Bolzano-Cauchyovy podmínky pro stejnoměrnou konvergenci. Základní nutné podmínky pro stejnoměrnou konvergenci řad. Moore-Osgoodova věta o záměně limit pro funkce na metrickém prostoru a na $\mathbb{R}$, spojitost limitní funkce, derivace a Newtonův integrál limitní funkce - příslušné věty pro řady funkcí. Weierstrassovo, Abelovo a Dirichletovo kritérium pro stejnoměrnou konvergenci řad. Charakterizace lokálně stejnoměrné konvergence na otevřeném intervalu. Aplikace vět o stejnoměrné konvergenci na mocninné řady. Abelova věta o mocninných řadách, Abelova věta a Abelova sčítací metoda - aplikace na vyjádření ln 2 a $\frac{\pi}{4}$ pomocí řad. Sčítací (Cesarova) metoda aritmetických průměrů.

Integrální kritérium pro konvergenci řad. Taylorova věta s integrálním tvarem zbytku. Délka cesty (křivky) v $\mathbb{R}^n$. Limes superior a inferior funkce (tvrzení bez důkazu). Weierstrassova věta o aproximaci (bez důkazu).

Přerovnávání řad - vztah k absolutní konvergenci, možné součty přerovnané neabsolutně konvergentní reálné řady (náznak důkazu). Zobecněná řada, charakterizace konvergence zobecněné řady. Pojem dvojné řady, součinu řad a Cauchyova součinu řad. Věta o součtu součinu a Cauchyova součinu řad - aplikace na komplexní exponenciálu. Zobecněný komutativní a asociativní zákon pro zobecněné řady (bez důkazu).

Metrické prostory: Množina hustá a dokonalá, okolí v širším smyslu. Otevřenost otevřené koule, lipschitzovskost funkce $\rho(a,.)$. Otevřenost (nebo uzavřenost) množin M^o, $\overline{M}$, ∂M. Zobrazení spojité, stejnoměrně spojité a lipschitzovské, homeomorfismus, izometrie. Metrika silnější, slabší, ekvivalentní a lipschitzovsky ekvivalentní; topologický pojem. Charakterizace spojitých zobrazení pomocí vzorů množin. Cantorovo discontinuum (vlastnosti bez důkazu). Charakterizace otevřených množin v $\mathbb{R}$. Redukovaná metrika v $\mathbb{R}^*$. Normovaný lineární prostor. Základní příklady : $\mathbb{R}^n$ (se třemi normami), l^2, l^∞, l^1, $C[a,b]$ (se třemi normami).

Úplný a kompaktní metrický prostor - jejich vztah. Omezenost kompaktních množin. $C[a,b]$ je Banachův prostor. Úplnost a kompaktnost podprostoru. Kompaktní podmnožiny $\mathbb{R}^n$. Spojitý obraz kompaktu a důsledky (nabývání extrémů spojité funkce a neexistence striktně slabší metriky na kompaktním prostoru). Spojitá a stejnoměrně spojitá zobrazení na kompaktním metrickém prostoru. Věty o neprázdnosti průniku posloupnosti uzavřených množin v kompaktním a úplném prostoru. Diniho věta o monotónní konvergenci spojitých funkcí na kompaktu. Vzdálenost dvou množin, vzdálenost bodu od množiny, body s nulovou vzdáleností od množiny. Uzavřená (otevřená) množina je G_δ (F_σ). Vzdálenost dvou kompaktních množin.

Obyčejná diferenciální rovnice n-tého řádu; rozšíření řešení na maximální řešení. Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými a lineární diferenciální rovnice 1. řádu (metoda variace konstanty). Věta o slepování řešení. Peanova věta o existenci (bez důkazu), Picardova věta o existenci a jednoznačnosti a jejich vektorové analogie. Soustava diferenciálních rovnic 1. řádu - vektorový zápis. Soustava n lineárních diferenciálních rovnic se spojitými koeficienty (v reálném i komplexním oboru) - věta o existenci a jednoznačnosti, definiční obor maximálních řešení. Fundamentální systém, obecný tvar řešení, metoda variace konstant. Případ konstantních koeficientů ($y' = Ay$): komplexní fundamentální systém pro případ n různých vlastních čísel. Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu se spojitými koeficienty - převedení na soustavu rovnic 1. řádu a jeho důsledky : věta o existenci a jednoznačnosti, fundamentální systém a wronskián. Tvar obecného řešení, variace konstant. Případ konstantních koeficientů: polynom provedený na operátor, fundamentální systém, reálný fundamentální systém "reálné rovnice". Tvar partikulárního řešení pro speciální pravou stranu (komplexní a reálný případ, bez důkazu). Harmonický oscilátor, vynucené kmity, rezonance.

Na písemce budou příklady řešitelné metodami potřebnými k řešení zadaných (nehvězdičkovaných) doporučených úloh. Například jde o úlohy na tato témata:

implicitní funkce; transformace do polárních souřadnic; stejnoměrná a lokálně stejnoměrná konvergence; limita, spojitost a derivace součtu řady funkcí; užití Abelovy věty a Abelovy sčítací metody; lokální a absolutní extrémy; vázané extrémy; diferenciální rovnice se separovanými proměnnými a lineární diferenciální rovnice; soustava lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu s konstatními koeficienty (pro případ n různých reálných vlastních čísel); lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty (variace konstant i případ speciální pravé strany).