Požadavky ke zkoušce z matematické analýzy, LS 2014

(Konečná verze.)

Kritéria pro konvergenci řad: Leibnizovo, Dirichletovo, Abelovo.

Desetinné rozvoje (informativně). Součet řady a nerovnosti.

Vztah ryzí monotonie a prostoty pro spojité funkce. Existence nespojité derivace. Darbouxova vlastnost derivace.

Množina primitivních funkcí k funkci na intervalu, chápání rovnic s neurčitými integrály, neurčité integrály elementárních funkcí. Neurčitý integrál lineární kombinace funkcí. Dvě věty o integraci pomocí substituce, integrace "per partes". Věta o "slepování" primitivních funkcí. Rozklady polynomu na kořenové činitele a racionální funkce na parciální zlomky (bez důkazu). Integrace racionálních funkcí, $\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$, $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$, $\int R(\sin x, \cos x)dx$, $\int R(e^{\alpha x})dx$. Hyperbolické a inverzní hyperbolické funkce (bez důkazu).

Asymptotické srovnávání funkcí (a posloupností) - terminologie ($o, O, \sim, \asymp$, funkce nekonečně malá řádu n a řádu vyššího než n.) Diferenciál - vztah k derivaci. Taylorova věta s Peanovým, Lagrangeovým a Cauchyovým tvarem zbytku. Počítání limit a vyšetřování lokálních extrémů pomocí Taylorovy věty. Taylorova řada, rozvoje funkcí $e^x, \sin x, \cos x$. Definice komplexní exponenciály, Eulerovy vzorce.

Mocninná řada v komplexním oboru, věta o poloměru konvergence, Cauchy-Hadamardův vzorec. Derivování mocninné řady člen po členu na kruhu konvergence. Integrace mocninné řady. Jednoznačnost rozvoje do mocninné řady. Rozvoje funkcí $\ln(1+x), \operatorname{arctg}\ x, (1+x)^\alpha, \arcsin x$. Důkaz existence "axiomaticky definované" funkce exp.

Vztah spojitosti a stejnoměrné spojitosti funkce na uzavřeném intervalu.

Darbouxova (a Riemannova) definice Riemannova integrálu. Podmínka B.-C. typu pro existenci integrálu. Základní vlastnosti Riemannova integrálu. Existence Riemannova integrálu pro spojité a monotónní funkce (podle obou definic).

Vlastnosti neurčitého Riemannova integrálu, existence primitivní funkce ke spojité funkci na libovolném intervalu, Newton - Leibnizova formule. Integrální průměr funkce.

Definice „klasického Newtonova integrálu“ a zobecněného Riemannova integrálu. Newtonův integrál: definice, základní vlastnosti, „(BC)-podmínka“, per partes a dvě věty o substituci, kritéria konvergence (srovnávací, limitní srovnávací, Abelovo, Dirichletovo). Dvě věty o střední hodnotě integrálního počtu.

Eukleidovská, maximová a součtová norma v R^n - jejich vztah, příslušné vzdálenosti a okolí. Metrický prostor. Hromadný bod množiny, otevřená a uzavřená množina, uzávěr, vnitřek a hranice množiny. Dualita mezi uzávěrem a vnitřkem (uzavřenou a otevřenou množinou). Stabilita otevřených (uzavřených) množin vzhledem ke sjednocení a průniku. Diametr množiny. Spojitost (vzhledem k množině), stejnoměrná spojitost, lipschitzovskost a limita (vzhledem k množině) zobrazení mezi metrickými prostory. Limita složeného zobrazení, spojitost složeného zobrazení (v bodě i na množině). Konvergence posloupnosti a Heineho věta. Vyšetřování spojitosti a limity zobrazení mezi eukleidovskými prostory "po složkách". Vyšetřování spojitosti a limity funkcí více proměnných. Spojitost složené funkce.

Parciální funkce a parciální derivace. Totální diferenciál funkce - vztah ke spojitosti, k existenci parciálních derivací a ke spojitosti parciálních derivací. Definice tečné nadroviny ke grafu funkce. "Slabá verze" věty o přírustku funkce. Gradient a derivace podle vektoru (ve směru). Derivace (diferenciál) zobrazení mezi eukleidovskými prostory - vztah ke spojitosti a k derivaci podle vektoru. Jacobiho matice a jacobián. Vztah spojitosti parciálních derivací složek a existence derivace. Derivace (diferenciál) složeného zobrazení. Řetízkové pravidlo.

K písemné části zkoušky:

Struktura písemky včetně bodování bude dosti podobná té v minulém semestru. (Viz ukázková písemka ze zimního semestru.)

V početní části budou příklady, pro jejichž řešení stačí zvládnout početní metody potřebné k řešení ("neohvězdičkovaných") příkladů z "Doporučených úloh". Zejména jde o příklady na konvergenci řad, výpočet neurčitých integrálů, použití Taylorovy věty, teorii mocninných řad, konvergenci Newtonových integrálů, a vyšetřování limit a totálních diferenciálů funkcí více proměnných.

V teoretické části budou určitě 2-3 úlohy na definice a znění vět a důkazová úloha (jako v minulém semestru bude možnost výběru ze dvou variant).

Dále mohou v písemce být úlohy na aplikaci věty (kterou je třeba přesně zformulovat) v početně jednoduché situaci, úlohy na znalost definice (např. výpočet tečné nadroviny, Taylorova polynomu, totálního diferenciálu apod.) nebo úlohy vyžadující jednoduchý důkaz nebo protipříklad z přednášky.

Každá z obou částí bude trvat 90 minut.