

Písemná zkouška z Matematiky I pro FSV (E)
ZS 2018/2019

Úloha 1 (13 bodů). Spočtěte následující limitu posloupnosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arcsin \left(\sqrt{n^2 + \sin^2(n)} - \sqrt{n^2 - \cos^2(n)} \right)}{\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1}}.$$

Úloha 2 (13 bodů). Spočtěte následující limitu funkce.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\log(x+1)}{\log(x-1)} \right)^{x \log(x)}.$$

Úloha 3 (11 bodů). Vyšetřete spojitost, resp. jednostrannou spojitost funkce f a spočtěte derivaci, resp. jednostranné derivace, funkce f ve všech bodech, kde existují.

$$f(x) = \left[\frac{4}{\pi} \operatorname{arctg}(x) \right] x^2.$$

(Výraz $[z]$ značí celou část čísla $z \in \mathbb{R}$.)

Úloha 4 (13 bodů). Uvažujte funkci

$$f(x) = \operatorname{arccotan} \left(\frac{1}{1-x^3} \right).$$

- (a) Určete intervaly monotonie funkce f , nalezněte její lokální extrémy a určete její obor hodnot.
- (b) Určete intervaly, na kterých je f konvexní. Určete intervaly, na kterých je f konkávní. Nalezněte inflexní body.
- (c) Načrtněte obrázek funkce f .

Řešení

Úloha 1. $\frac{1}{2}$.

Úloha 2. e^2 .

Úloha 3. f je spojitá, respektive spojitá zleva na $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ a spojitá zprava na $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \left[\frac{4}{\pi} \operatorname{arctg}(x) \right] & : x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1\}, \\ 0 & : x = 0, \end{cases}$$

$f'_-(\pm 1) = +\infty$, $f'_+(\pm 1) = 2$ a tedy $f'(\pm 1)$ neexistuje.

Úloha 4. Funkce f je klesající na intervalech $(-\infty, 1)$, $(1, +\infty)$. Funkce f nemá lokální extrémy a $H(f) = (0, \pi) \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$. Funkce f je konvexní na intervalech $\left(\sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{17}}{4}}, 0 \right)$, $\left(\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{17}}{4}}, +\infty \right)$ a konkávní na intervalech $\left(-\infty, \sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{17}}{4}} \right)$, $(0, 1)$, $\left(1, \sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{17}}{4}} \right)$. Inflexní body funkce f jsou body $\sqrt[3]{\frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}}$, 0.