

**Písemná zkouška z Matematiky I pro FSV (D)**  
**ZS 2018/2019**

---

**Úloha 1** (13 bodů). Spočtěte následující limitu posloupnosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1^1 + 2^2 + \dots + n^n)}{\sqrt{n^4 + 2n^3 \log(n)} - \sqrt{n^4 - n^3}}.$$

**Úloha 2** (13 bodů). Spočtěte následující limitu funkce.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} (2 \sin(x))^{\frac{2}{\pi - 6x}}.$$

**Úloha 3** (11 bodů). Vyšetřete spojitost funkce  $f$  a spočtěte derivaci, resp. jednostranné derivace, funkce  $f$  ve všech bodech, kde existují.

$$f(x) = \operatorname{sign}(x^3 - 4x) \sin(x^3 - 2x^2).$$

**Úloha 4** (13 bodů). Uvažujte funkci

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2}{x-3}}.$$

- (a) Určete intervaly monotonie funkce  $f$ , nalezněte její lokální extrémy a určete její obor hodnot.
- (b) Určete intervaly, na kterých je  $f$  konvexní. Určete intervaly, na kterých je  $f$  konkávní. Nalezněte inflexní body.
- (c) Načrtněte obrázek funkce  $f$ .

---

**Řešení**

---

**Úloha 1.** 1.

**Úloha 2.**  $e^{-\sqrt{\frac{1}{3}}}$ .

**Úloha 3.**  $f$  je spojitá na  $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ .

$$f'(x) = \begin{cases} \operatorname{sign}(x^3 - 4x) \cos(x^3 - 2x)(3x^2 - 4x) & : x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 2\}, \\ 0 & : x = 0, \\ +\infty & : x = -2, \end{cases}$$

$f'_+(2) = 4$ ,  $f'_-(2) = -4$  a tedy  $f'(2)$  neexistuje.

**Úloha 4.** Funkce  $f$  je rostoucí na intervalech  $(-\infty, 0 >$ ,  $< 6, +\infty)$  a klesající na intervalech  $< 0, 3)$ ,  $(3, 6 >$ . Funkce  $f$  nabývá lokálního maxima v bodě 0, lokálních minima v bodě 6 a  $H(f) = (-\infty, 0 > \cup < \sqrt[3]{12}, +\infty)$ . Funkce  $f$  je konvexní na intervalech  $(-\infty, 0)$ ,  $(0, 6 - 3\sqrt{3})$ ,  $(3, 6 + 3\sqrt{3})$  a konkávní na intervalech  $(6 - 3\sqrt{3}, 3)$ ,  $(6 + 3\sqrt{3}, +\infty)$ . Inflexní body funkce  $f$  jsou  $6 \pm 3\sqrt{3}$ .