

Písemná zkouška z Matematiky I pro FSV (C)
ZS 2018/2019

Úloha 1 (13 bodů). Spočítejte následující limitu posloupnosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^{48} + n} - \sqrt[3]{n^{48} + n^2} \right) \left((n^3 + 3)^{12} - (n^4 + 4n)^9 \right).$$

Úloha 2 (13 bodů). Spočítejte následující limitu funkce.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4^{\operatorname{tg}(x)} + \cos(x)}{2} \right)^{\cot(x)}.$$

Úloha 3 (11 bodů). Vyšetřete spojitost funkce f a spočítejte derivaci, resp. jednostranné derivace, funkce f ve všech bodech, kde existují.

$$f(x) = \cos(x)^{\min\{2, x^3 + x^2 - 2x + 2\}}.$$

Úloha 4 (13 bodů). Uvažujte funkci

$$f(x) = \frac{4^x - 12}{(2^x - 9)^2}.$$

- (a) Najděte definiční obor funkce f .
- (b) Určete intervaly monotonie funkce f a nalezněte její lokální i globální extrémy.
- (c) Určete intervaly, na kterých je f konvexní. Určete intervaly, na kterých je f konkávní. Nalezněte inflexní body.

Řešení

Úloha 1. –6.

Úloha 2. 2.

Úloha 3. Položme $g(x) = \min\{2, x^3 + x^2 - 2x + 2\}$. Pak funkce g je spojitá a definovaná na $\mathbb{R}$, neboť minimum z dvou spojitých funkcí je spojitá funkce. Protože

$$f(x) = e^{\log(\cos(x))g(x)},$$

tak

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}; \cos(x) > 0\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right)$$

a f je spojitá na D_f . Používáme fakt, že složení dvou spojitých funkcí je spojitá funkce. Dále

$$g(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 - 2x + 2 & : x \in (-\infty, -2) \cup (0, 1), \\ 2 & : x \in (-2, 0) \cup (1, +\infty). \end{cases}$$

Pak

$$g'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2x - 2 & : x \in (-\infty, -2) \cup (0, 1), \\ 2 & : x \in (-2, 0) \cup (1, +\infty). \end{cases}$$

a

$$f'(x) = f(x)(\log(\cos(x))g(x))' = f(x)(-\operatorname{tg}(x)g(x) + \log(\cos(x))g'(x)),$$

kde $x \in D_f \setminus \{0, 1\}$. Protože f je spojitá v bodech 0, 1, tak můžeme počítat jednostranné derivace v těchto bodech jako příslušné jednostranné limity derivací a obdržíme: $f'_-(0) = f'_+(0) = 0$, $f'_+(1) = -2 \cos^2(1) \operatorname{tg}(1)$ a $f'_-(1) = -\cos^2(1)(2 \operatorname{tg}(1) - 3 \log(\cos(1)))$. Tedy derivace v bodě 1 neexistuje a $f'(0) = 0$.

Úloha 4. Řešení

- (a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\log_2(9)\}$.
- (b) Funkce f je rostoucí na intervalu $[\log_2(\frac{4}{3}), \log_2(9))$ a klesající na intervalech $(-\infty, \log_2(\frac{4}{3})]$, $(\log_2(9), +\infty)$ a má lokální minimum v bodě $\log_2(\frac{4}{3})$. Neboť $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ a $f(\log_2(\frac{4}{3})) < 0$, tak bod $\log_2(\frac{4}{3})$ je i globálním minimem funkce f . Protože $\lim_{x \rightarrow \log_2(9)} f(x) = +\infty$ tak f nemá globální maximum.
- (c) Funkce f je konvexní na intervalech $(\log_2(\frac{-23+\sqrt{637}}{3}), \log_2(9))$, $(\log_2(9), +\infty)$ a konkávní na intervalu $(-\infty, \log_2(\frac{-23+\sqrt{637}}{3}))$. Inflexním bodem je bod $\log_2(\frac{-23+\sqrt{637}}{3})$.