

Písenná zkouška z Matematiky I pro FSV (B)
ZS 2018/2019

Úloha 1 (13 bodů). Spočítejte následující limitu posloupnosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^{4n} + (4n)^n} \left(\left(2 + \frac{1}{n^2} \right)^{18} - \left(4 + \frac{4}{n^2} \right)^9 \right).$$

Úloha 2 (13 bodů). Spočítejte následující limitu funkce.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos(x) + \frac{1}{\cos(x)} - 1 \right)^{\frac{1}{\sin(x^4)}}.$$

Úloha 3 (11 bodů). Vyšetřete spojitost funkce f a spočítejte derivaci, resp. jednostranné derivace, funkce f ve všech bodech, kde existují.

$$f(x) = \sqrt[3]{3|x^2-1|} - 3.$$

Úloha 4 (13 bodů). Uvažujte funkce

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + x + 1}, \\ g(x) &= f|_{[0, +\infty)}(x). \end{aligned}$$

Neboli funkce g je restrikcí funkce f na interval $[0, +\infty)$.

- (a) Určete intervaly monotonie funkce g .
- (b) Rozhodněte, zda existuje inverzní funkce k funkci g a pokud ano, tak určete definiční obor g^{-1} .
- (c) Určete intervaly, na kterých je funkce g konvexní. Určete intervaly, na kterých je funkce g konkávní. Nalezněte inflexní body funkce g .

Řešení

Úloha 1. $9 \cdot 2^{16}$.

Úloha 2. $\sqrt[4]{e}$.

Úloha 3. f je spojitá na $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{3|x^2-1| \log(3) \operatorname{sign}(x^2-1) 2x}{3 \left(\sqrt[3]{3|x^2-1|} - 3 \right)^2} & : x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1, \pm \sqrt{2}\}, \\ -\infty & : x = -\sqrt{2}, \\ +\infty & : x = \sqrt{2}, \end{cases}$$

$f'_-(\pm 1) = -\frac{\sqrt{2}}{3} \log(3)$, $f'_+(\pm 1) = \frac{\sqrt{2}}{3} \log(3)$, $f'_-(0) = +\infty$, $f'_+(0) = -\infty$ a tedy $f'(\pm 1)$ a $f'(0)$ neexistují.

Úloha 4. Funkce g je rostoucí a tedy má inverzní funkci, jejíž definiční obor je roven oboru hodnot funkce g , což je $[1, +\infty)$. Funkce g je konvexní na intervalu $\left(0, \frac{7+\sqrt{69}}{2}\right)$, konkávní na intervalu $\left(\frac{7+\sqrt{69}}{2}, +\infty\right)$ a má inflexní bod $\frac{7+\sqrt{69}}{2}$.