

Písemná zkouška z Matematiky I pro FSV (A)
ZS 2018/2019

Úloha 1 (13 bodů). Spočtěte následující limitu posloupnosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n + \cos\left(\frac{3}{n}\right)}}{\sqrt[6]{n^2 + \sin\left(\frac{2}{n}\right)} - \sqrt[3]{n}}.$$

Úloha 2 (13 bodů). Spočtěte následující limitu funkce.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{1 + \sqrt{\tan(x)}}{\cos(\sqrt{x})} \right)^{\frac{\sqrt{1 - \sqrt{\sin(x)}} - \sqrt{1 + \sqrt{\tan(x)}}}{x}}.$$

Úloha 3 (11 bodů). Vyšetřete spojitost funkce f a spočtěte derivaci, resp. jednostranné derivace, funkce f ve všech bodech, kde existují.

$$f(x) = \cos(\max\{x, x^2\}).$$

Úloha 4 (13 bodů). Uvažujte funkci

$$f(x) = |x + 3| + 2 \arctan(|x + 1|).$$

- (a) Určete intervaly monotonie funkce f a nalezněte její lokální extrémy.
- (b) Určete intervaly, na kterých je f konvexní. Určete intervaly, na kterých je f konkávní. Nalezněte inflexní body.
- (c) Spočtěte asymptotu funkce f v $-\infty$.

Řešení

Úloha 1. $\frac{9}{2}$.

Úloha 2. $\frac{1}{e}$.

Úloha 3. f je spojitá na $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \begin{cases} -\sin(x^2)2x & : x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty), \\ -\sin(x) & : x \in (0, 1), \end{cases}$$

$f'(0) = 0$, $f'_-(1) = -\sin(1)$, $f'_+(1) = -2\sin(1)$ a tedy $f'(1)$ neexistuje.

Úloha 4. Funkce f je rostoucí na intervalech $[-3, -2]$, $[-1, +\infty)$ a klesající na intervalech $(-\infty, -3]$, $[-2, -1]$. Funkce f nabývá lokálního maxima v bodě -2 a lokálních minim v bodech -3 a -1 . Funkce f je konkávní na intervalech $(-\infty, -3)$, $(-3, -1)$, $(-1, +\infty)$ a nemá inflexní bod. Asymptotou k funkci f v $-\infty$ je graf funkce $l(x) = -x + \pi - 3$.