Písemná zkouška z Matematiky III pro FSV (E)
ZS 2014/2015

Úloha 1 (12 bodů)**.** Spočtěte integrál

$$\int_{\frac{-3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{3 + 2\sin^2 x - \cos^2 x}{1 + \sin x \cos x} dx.$$

Úloha 2 (12 bodů)**.** Nechť B_p je kvadratická forma reprezentovaná maticí A_p, kde

$$\mathrm{A}_p = \begin{pmatrix} 4 & p-1 & 3 \\ p-1 & 1 & p \\ 3 & p & 4 \end{pmatrix}.$$

Převeďte matici A_p na diagonální tvar a určete, zda forma B_p je PD, ND, PSD, NSD, či ID v závislosti na parametru $p \in \mathbb{R}$.

Úloha 3 (12 bodů)**.** Určete vlastní čísla matice A a všechny jim příslušné vlastní vektory. Lze každý vektor z $\mathbb{R}^4$ vyjádřit jako lineární kombinaci vlastních vektorů matice A?

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & -8 & -12 & -4 \\ 3 & -4 & -6 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Úloha 4 (12 bodů)**.** Spočtěte limitu

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 + \log(1+x))^{\sin x} - x^2 e^{-x} - e^{x^4}}{\sin^5 x}.$$

Úloha 5 (12 bodů)**.** Nalezněte všechny lokální extrémy funkce f na D_f, kde

$$f(x,y) = 2xy \log(2x^2 + 3y^2).$$

Řešení

Úloha 1. $\frac{14\pi}{\sqrt{3}}$.

Úloha 2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2p^2+2p+3 \end{pmatrix}$. Forma B_p je indefinitní pro $p \in \big(-\infty, \frac{1-\sqrt{7}}{2}\big) \cup \big(\frac{1+\sqrt{7}}{2}, +\infty\big)$, pozitivně definitní pro $p \in \big(\frac{1-\sqrt{7}}{2}, \frac{1+\sqrt{7}}{2}\big)$ a pozitivně semidefinitní pro $p = \frac{1-\sqrt{7}}{2}$ a $p = \frac{1+\sqrt{7}}{2}$.

Úloha 3. (vlastní číslo, násobnost, množina vlastních vektorů):
$(-1, 2, \{t[1,-1,1,0] + s[-1,-1,0,1] \colon [t,s] \in \mathbb{C}^2 \setminus \{[0,0]\}\})$,
$(1, 1, \{t[-2,0,-1,2] \colon t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\})$,
$(2, 1, \{t[0,1,-1,1] \colon t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\})$.
Ano, neboť existují 4 lineárně nezávislé vlastní vektory.

Úloha 4. $-\frac{17}{8}$.

Úloha 5. Body $\left[0, \pm\sqrt{\frac{1}{3}}\right]$, $\left[\pm\sqrt{\frac{1}{2}}, 0\right]$ jsou sedlové body. V bodech $\pm\left[\sqrt{\frac{1}{4e}}, \sqrt{\frac{1}{6e}}\right]$ je ostré lokální minimum a v bodech $\pm\left[\sqrt{\frac{1}{4e}}, -\sqrt{\frac{1}{6e}}\right]$ je ostré lokální maximum.