Písemná zkouška z Matematiky III pro FSV (D)
ZS 2014/2015

Úloha 1 (12 bodů)**.** Najděte primitivní funkce (včetně určení intervalů existence)

$$\int \frac{\log^3 x + 6\log^2 x + 5\log x - 38}{x(\log^2 x + 3\log x + 3)(\log^2 x + 4)(\log x + 2)} dx.$$

Úloha 2 (12 bodů)**.** Nechť B je kvadratická forma reprezentovaná maticí A, kde

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -9 & -4 & -4 & 18 \\ -4 & -2 & -2 & 8 \\ -4 & -2 & -6 & 12 \\ 18 & 8 & 12 & -40 \end{pmatrix}.$$

Převeďte matici A na diagonální tvar, určete, zda forma B je PD, ND, PSD, NSD, či ID a spočtěte $B\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Úloha 3 (12 bodů)**.** Určete vlastní čísla matice A a všechny jim příslušné vlastní vektory. Lze každý vektor z $\mathbb{R}^4$ vyjádřit jako lineární kombinaci vlastních vektorů matice A?

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -16 & 17 & 4 & 17 \\ -37 & 38 & 4 & 35 \\ -14 & 13 & 5 & 13 \\ 27 & -27 & 0 & -24 \end{pmatrix}.$$

Úloha 4 (12 bodů)**.** Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0+} \frac{(\cos x)^{\sin x} - \cos\sqrt{x^3} - \frac{1}{12}x^6 e^{-\frac{3x}{20}}}{x^4 \tan^4 x}.$$

Používáte-li „substituci“, nezapomeňte ji odůvodnit.

Úloha 5 (12 bodů)**.** Nalezněte všechny lokální extrémy funkce f na D_f, kde

$$f(x,y) = (2x^2 + 3y^2)^{2x-y}.$$

Řešení

Úloha 1. $\frac{1}{2}\log(\log^2 x{+}4){+}\frac{3}{2}\arctan\left(\frac{\log x}{2}\right){-}4\log|\log x{+}2|{+}\frac{3}{2}\log(\log^2 x{+}3\log x{+}3){-}\frac{11}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\log x+3}{\sqrt{3}}\right){+}$ c na intervalech $\left(0,\frac{1}{e^2}\right)$, $\left(\frac{1}{e^2},\infty\right)$.

Úloha 2. $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, NSD, -106.

Úloha 3. (vlastní číslo, násobnost, množina vlastních vektorů):
$(3, 3, \{t[0,-1,0,1] + s[2,2,1,0] \colon [t,s] \in \mathbb{C}^2 \setminus \{[0,0]\}\})$,
$(-6, 1, \{t[-5,-11,-4,9] \colon t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\})$.

Lze nalézt nejvýše tři lineárně nezávislé vlastní vektory, tedy tyto vektory nemohou generovat prostor $\mathbb{R}^4$.

Úloha 4. $-\frac{3}{3200}$

Úloha 5. V bodě $\frac{1}{e}\sqrt{\frac{1}{21}}[-3, 1]$ je ostré lokální maximum, v bodě $\frac{1}{e}\sqrt{\frac{1}{21}}[3, -1]$ je ostré lokální minimum a body $\pm\sqrt{\frac{1}{14}}[1, 2]$ jsou sedlovými body.