

Písenná zkouška z Matematiky III pro FSV (C)
ZS 2014/2015

Úloha 1 (12 bodů). Najděte primitivní funkce (včetně určení intervalů existence)

$$\int \frac{1 + \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}}{1 + \sqrt[4]{\frac{x+1}{x+2}}} dx.$$

Úloha 2 (12 bodů). Necht' B_p je kvadratická forma reprezentovaná maticí A_p , kde

$$A_p = \begin{pmatrix} p & 2 & 1 \\ 2 & p+1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Převeďte matici A_p na diagonální tvar a určete, zda forma B_p je PD, ND, PSD, NSD, či ID v závislosti na parametru $p \in \mathbb{R}$.

Úloha 3 (12 bodů). Určete vlastní čísla matice A (včetně násobnosti) a všechny jim příslušné vlastní vektory. Lze každý vektor z \mathbb{R}^3 vyjádřit jako lineární kombinaci vlastních vektorů matice A ?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & -4 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Úloha 4 (12 bodů). Spočítejte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x - 1} - \cos(e^x - 1) - xe^x + x(x+1) - \frac{1}{4}x^4}{(\cos x - 1)^2 \sin^2 x}.$$

Používáte-li „substituci“, nezapomeňte ji odůvodnit.

Úloha 5 (12 bodů). Nalezněte všechny lokální extrémy funkce f v množině D_f , kde

$$f(x, y) = \arctan(6xy - 2x^2y + xy^2).$$

Řešení

Úloha 1. (Až na konstantu) $\frac{1}{8} \log \left| \sqrt[4]{\frac{x+1}{x+2}} - 1 \right| + \frac{3}{8} \log \left(\sqrt[4]{\frac{x+1}{x+2}} + 1 \right) - \frac{\frac{1}{4}}{\sqrt[4]{\frac{x+1}{x+2}} - 1} - \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[4]{\frac{x+1}{x+2}} + 1} + \frac{\frac{1}{4}}{\left(\sqrt[4]{\frac{x+1}{x+2}} + 1 \right)^2} - \frac{1}{4} \log \left(\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} + 1 \right) - \frac{1}{2} \arctan \left(\sqrt[4]{\frac{x+1}{x+2}} \right)$ na intervalech $(-\infty, -2)$ a $(-1, \infty)$.

Úloha 2. $p = 1$: $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $p \neq 1$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & p-1 & 0 \\ 0 & 0 & (p-1)(p^2-9p-17) \end{pmatrix}$. Forma B_p je indefinitní pro $p \in (-\infty, \frac{9+\sqrt{149}}{2})$, pozitivně definitní pro $p \in (\frac{9+\sqrt{149}}{2}, \infty)$ a pozitivně semidefinitní pro $p = \frac{9+\sqrt{149}}{2}$.

Úloha 3. (vlastní číslo, násobnost, množina vlastních vektorů):

$$(-1, 2, \{t[0, 1, 1] : t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}),$$

$$(2, 1, \{t[1, 1, 1] : t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}).$$

Lze nalézt nejvýše dva lineárně nezávislé vlastní vektory, tedy tyto vektory nemohou generovat prostor \mathbb{R}^3 .

Úloha 4. $\frac{-7}{18}$.

Úloha 5. V bodě $[1, -2]$ je ostré lokální minimum a body $[0, 0]$, $[0, -6]$ a $[3, 0]$ jsou sedlovými body.