

**Písemná zkouška z Matematiky III pro FSV (B)**  
**ZS 2014/2015**

---

**Úloha 1** (12 bodů). Spočítejte integrál

$$\int_0^{\frac{7}{2}\pi} \frac{\cos x + 1}{\sin x - 2} dx.$$

**Úloha 2** (12 bodů). Necht'  $B$  je kvadratická forma reprezentovaná maticí  $A$ , kde

$$A = \begin{pmatrix} \frac{21}{4} & \frac{13}{2} & \frac{21}{2} & -3 \\ \frac{13}{2} & 13 & 13 & -6 \\ \frac{21}{2} & 13 & 31 & -6 \\ -3 & -6 & -6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Převeďte matici  $A$  na diagonální tvar, určete, zda forma  $B$  je PD, ND, PSD, NSD, či ID a spočítejte  $B \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ .

**Úloha 3** (12 bodů). Určete vlastní čísla matice  $A$  (včetně násobnosti) a všechny jim příslušné vlastní vektory. Lze každý vektor z  $\mathbb{R}^3$  vyjádřit jako lineární kombinaci vlastních vektorů matice  $A$ ?

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ -1 & -\frac{5}{3} & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}.$$

Nápověda: Vlastní čísla matice  $A$  jsou některá celá čísla blízka 0.

**Úloha 4** (12 bodů). Spočítejte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(\sin^2 x) - (\sin(\sin x))^2 - \sin(\sin x^2)}{\sin^6 x}.$$

**Úloha 5** (12 bodů). Nalezněte všechny lokální extrémy funkce  $f$  v množině  $M$ , kde

$$f(x, y, z) = x^3 + 2x^2y - z^2 + 2y^2z, \quad M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; y < 0\}.$$

---

**Řešení**

---

**Úloha 1.**  $\log\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{11\pi}{3\sqrt{3}}$ .

**Úloha 2.**  $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ , PD,  $87 + \frac{1}{4}$ .

**Úloha 3.** (vlastní číslo, násobnost, množina vlastních vektorů):

$$(-2, 1, \{t[1, -1, 1] : t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}),$$
$$(-3, 2, \{t[1, 0, 3] + s[5, -3, 0] : [t, s] \in \mathbb{C}^2 \setminus \{[0, 0]\}\}).$$

Ano.

**Úloha 4.**  $-\frac{2}{9}$ .

**Úloha 5.** Funkce  $f$  nenabývá lokálního extrému v množině  $M$ . Bod  $[\frac{32}{27}, -\frac{8}{9}, \frac{64}{81}]$  je sedlovým bodem.