Písemná zkouška z Matematiky III pro FSV (A)
ZS 2014/2015

Úloha 1 (12 bodů). Najděte primitivní funkci (včetně určení intervalů existence)

$$\int \frac{\sin^2 x + 1}{\sin x(\cos x + 1)} dx.$$

Úloha 2 (12 bodů). Nechť B_p je kvadratická forma reprezentovaná maticí A_p, kde

$$\mathrm{A}_p = \begin{pmatrix} 3 & 2 & p \\ 2 & 2 & -1 \\ p & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Převeďte matici A_p na diagonální tvar a určete, zda forma B_p je PD, ND, PSD, NSD, či ID v závislosti na parametru $p \in \mathbb{R}$.

Úloha 3 (12 bodů). Určete vlastní čísla matice A a všechny jim příslušné vlastní vektory. Lze každý vektor z $\mathbb{R}^3$ vyjádřit jako lineární kombinaci vlastních vektorů matice A?

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Úloha 4 (12 bodů). Spočtěte limitu

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(\cos 2x) + \frac{1}{2} \sin 2x \tan 2x}{\sin^3 x - x \sin^2 x}.$$

Používáte-li „substituci“, nezapomeňte ji odůvodnit. Nápověda: U čitatele spočítejte Taylorův polynom pátého řádu.

Úloha 5 (12 bodů). Nalezněte všechny lokální extrémy funkce f na D_f, kde

$$f(x, y) = 2 \arctan(x^2 + y) - \arctan(y + 1).$$

Řešení

Úloha 1. $\frac{1}{4} \log(1 - \cos x) - \frac{5}{4} \log(1 + \cos x) + \frac{1}{2(1+\cos x)} + c_k$ na $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Úloha 2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2p^2 - 4p - 1 \end{pmatrix}$. Forma B_p je indefinitní pro $p \in \left(-\infty, -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$, pozitivně definitní pro $p \in \left(-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ a pozitivně semidefinitní pro $p = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ a $p = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Úloha 3. (vlastní číslo, násobnost, množina vlastních vektorů):

$(-1, 2, \{t[1, 0, 1] \colon t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\})$,

$(1, 1, \{t[1, 1, 1] \colon t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\})$.

Lze nalézt nejvýše dva linearně nezávislé vlastní vektory, tedy tyto vektory nemohou generovat prostor $\mathbb{R}^3$.

Úloha 4. 0

Úloha 5. V bodě $[0, -1]$ je ostré lokální minimum a bod $[0, -3]$ je sedlovým bodem.