Písemná zkouška z Matematiky IV pro FSV (E)
LS 2014/2015

Úloha 1 (12 bodů). Najděte všechna řešení rovnice

$$y(n+4)+2y(n+2)+y(n)=16\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

a nalezněte řešení splňující $y(1)=2$, $y(2)=8$ a $y(3)=y(4)=0$.

Úloha 2 (11 bodů). Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y'=yx\sqrt[3]{\log(y)-1}$$

a načrtněte jejich průběh.

Úloha 3 (13 bodů). Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y'''+y'=\operatorname{cotg}(x)+e^x.$$

Úloha 4 (10 bodů). Popište průběh a načrtněte graf maximálních řešení rovnice

$$\frac{2^y-1}{2^y+1}(y^2-1)=y'\sqrt[3]{y^2-y}.$$

Úloha 5 (14 bodů). Najděte všechna maximální řešení soustavy

$$\begin{aligned} x'&=7x+15y-10z,\\ y'&=-10x-28y+20z,\\ z'&=-10x-30y+22z. \end{aligned}$$

a určete které z nich splňuje počáteční podmínku $[x(0),y(0),z(0)]=[1,2,3]$.

Řešení

Úloha 1. Obecné řešení je $y(n)=\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)(A+Cn+2n^2)+\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)(B+Dn)$, $A,B,C,D\in\mathbb{R}$. Počáteční podmínka je splňena pro $A=32$, $B=3$, $C=-16$ a $D=-1$.

Úloha 2. Pro $c\leq 0$ definujeme $I_c^-=(-\infty,-\sqrt{-2c})$ a $I_c^+=(\sqrt{-2c},+\infty)$ a pro $c\in\mathbb{R}$ definujeme $y_0^c(x)=e^{\left(1+\left(\frac{x^2+2c}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right)}$ a $y_1^c(x)=e^{\left(1-\left(\frac{x^2+2c}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right)}$. Maximalní řešení rovnice jsou $y(x)=e$ na $\mathbb{R}$; pro $i=0,1$ a $c>0: y(x)=y_i^c(x)$ na $\mathbb{R}$; pro $c,d\leq 0$ a $i,j=0,1:$

$$y(x)=\begin{cases} y_i^c(x), & x\in I_c^-,\\ e, & x\in\mathbb{R}\setminus(I_c^-\cup I_d^+),\\ y_j^d(x), & x\in I_d^+; \end{cases} \tag{1}$$

$$y(x)=\begin{cases} y_i^c(x), & x\in I_c^-,\\ e, & x\in\mathbb{R}\setminus I_c^-; \end{cases} \tag{2}$$

$$y(x)=\begin{cases} e, & x\in\mathbb{R}\setminus I_d^+,\\ y_i^d(x), & x\in I_d^+; \end{cases} \tag{3}$$

Úloha 3. $y(x)=A+B\sin(x)+\cos(x)\left(C+\log\left|\frac{1+\cos(x)}{\sin(x)}\right|\right)+\log|\sin(x)|+\frac{1}{2}e^x$, $A,B,C\in\mathbb{R}$, $x\in(k\pi,(k+1)\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$.

Úloha 4. Rovnice má stacionární řešení $y(x) = -1$, $y(x) = 0$ a $y(x) = 1$ na $\mathbb{R}$. Maximální řešení s hodnotami v intervalu $(-\infty, -1)$ jsou klesající a definované na intervalu typu $(-\infty, B)$, $B \in \mathbb{R}$. Maximální řešení s hodnotami v intervalu $(-1, 0]$ jsou slepena z rostoucího řešení definovaného na intervalu typu $(-\infty, B)$, $B \in \mathbb{R}$ s hodnotami v intervalu $(-1, 0)$ a stacionárního řešení $y(x) = 0$. Maximální řešení s hodnotami v intervalu $[0, 1]$ jsou slepena ze stacionárního řešení $y(x) = 0$, z rostoucího řešení definovaného na intervalu typu (A, B), $A, B \in \mathbb{R}$ s hodnotami v intervalu $(0, 1)$ a stacionárního řešení $y(x) = 1$. Maximální řešení s hodnotami v intervalu $(-1, 1]$ jsou slepena z rostoucího řešení definovaného na intervalu typu $(-\infty, B)$, $B \in \mathbb{R}$ s hodnotami v intervalu $(-1, 0)$, ze stacionárního řešení $y(x) = 0$, z rostoucího řešení definovaného na intervalu typu (A, C), $A, C \in \mathbb{R}$ s hodnotami v intervalu $(0, 1)$ a stacionárního řešení $y(x) = 1$. Maximální řešení s hodnotami v intervalu $[1, +\infty)$ jsou slepena ze stacionárního řešení $y(x) = 1$ a z rostoucího řešení definovaného na intervalu typu (A, B), $A, B \in \mathbb{R}$ s hodnotami v intervalu $(1, +\infty)$. Maximální řešení s hodnotami v intervalu $[0, +\infty)$ jsou slepena ze stacionárního řešení $y(x) = 0$, z rostoucího řešení definovaného na intervalu typu (A, B), $A, B \in \mathbb{R}$ s hodnotami v intervalu $(0, 1)$, ze stacionárního řešení $y(x) = 1$ a z rostoucího řešení definovaného na intervalu typu (C, D), $C, D \in \mathbb{R}$ s hodnotami v intervalu $(1, +\infty)$. Maximální řešení s hodnotami v intervalu $(-1, +\infty)$ jsou slepena z rostoucího řešení definovaného na intervalu typu $(-\infty, B)$, $B \in \mathbb{R}$ s hodnotami v intervalu $(-1, 0)$, ze stacionárního řešení $y(x) = 0$, z rostoucího řešení definovaného na intervalu typu (A, C), $A, C \in \mathbb{R}$ s hodnotami v intervalu $(0, 1)$, ze stacionárního řešení $y(x) = 1$ a z rostoucího řešení definovaného na intervalu typu (D, E), $D, E \in \mathbb{R}$ s hodnotami v intervalu $(1, +\infty)$.

Úloha 5. Maximální řešení jsou funkce $x(t) = -\frac{1}{2}Ae^{-3t} + (2B - 3C)e^{2t},\ y(t) = Ae^{-3t} + Ce^{2t},\ z(t) = Ae^{-3t} + Be^{2t}$ na $\mathbb{R}$, kde $A, B, C \in \mathbb{R}$. Počáteční podmínka je splněna pro $A = 2$, $B = 1$ a $C = 0$.