Písemná zkouška z Matematiky IV pro FSV (D)
LS 2014/2015

Úloha 1 (13 bodů)**.** Najděte všechna řešení rovnice

$$y(n+4) - y(n+2) + 2y(n+1) + 2y(n) = (-1)^n \left((8n+8)\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + (4n+2)\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) \right)$$

Úloha 2 (13 bodů)**.** Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y' = (y^2+1)\operatorname{cotg}(x).$$

a načrtněte jejich průběh.

Úloha 3 (10 bodů)**.** Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y' \sin^2(x) = y + \operatorname{cotg}(x) e^{\operatorname{cotg}(x)}.$$

Úloha 4 (10 bodů)**.** Popište průběh a načrtněte graf maximálních řešení rovnice

$$y' = \frac{y-1}{\sqrt[3]{y+1}} \log\left(\frac{1}{2} + 2^y\right).$$

Úloha 5 (14 bodů)**.** Najděte všechna maximální řešení soustavy

$$\begin{aligned} x' &= 6x - 7y - 6z, \\ y' &= -4x + 4y + 8z, \\ z' &= 7x - 8y - 11z \end{aligned}$$

a najděte řešení, jež splňuje počáteční podmínku $[x(0), y(0), z(0)] = [1, 0, -1]$.

Řešení

Úloha 1. $y(n) = \left(A + Bn + (2n-1)\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right)(-1)^n + 2^{\frac{n}{2}}\left(C\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) + D\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)\right)$.

Úloha 2. $y = \tan(\log|\sin(x)| + C)$ pro $C \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ na $\left(\arcsin\left(e^{-\frac{\pi}{2}-C}\right), \pi - \arcsin\left(e^{-\frac{\pi}{2}-C}\right)\right) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ pro $C \geq \frac{\pi}{2}$ na $\left(\arcsin\left(e^{-\frac{\pi}{2}-C}\right), \arcsin\left(e^{\frac{\pi}{2}-C}\right)\right) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ a $\left(\pi - \arcsin\left(e^{\frac{\pi}{2}-C}\right), \pi - \arcsin\left(e^{-\frac{\pi}{2}-C}\right)\right) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Úloha 3. $y(x) = Ce^{-\operatorname{cotg}(x)} + e^{\operatorname{cotg}(x)}\left(-\frac{1}{2}\operatorname{cotg}(x) + \frac{1}{4}\right)$, $C \in \mathbb{R}$, $x \in (k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Úloha 4. Rovnice má stacionární řešení $y(x) = 1$ na $\mathbb{R}$. Maximální řešení s hodnotami v intervalu $(-\infty, -1)$ jsou klesající a definované na intervalu typu $(A, +\infty)$, $A \in \mathbb{R}$. Maximální řešení s hodnotami v intervalu $(-1, 1)$ jsou klesající a definované na intervalu typu $(-\infty, B)$, $B \in \mathbb{R}$. Maximální řešení s hodnotami v intervalu $(1, +\infty)$ jsou rostoucí a definované na intervalu typu $(-\infty, B)$, $B \in \mathbb{R}$.

Úloha 5. Obecné maximální řešení jsou funkce $x(t) = 2Ce^{3t} + \frac{1}{4}e^{-2t}(2Bt + 2A + B)$, $y(t) = e^{-2t}(Bt + A)$, $z(t) = Ce^{3t} + \frac{1}{4}e^{-2t}(-2Bt - 2A + B)$ na $\mathbb{R}$, kde $A, B, C \in \mathbb{R}$. Maximální řešení splňující počáteční podmínku je $x(t) = 4e^{3t} + e^{-2t}(-6t - 3)$, $y(t) = -12te^{-2t}$, $z(t) = 2e^{3t} + e^{-2t}(6t - 3)$ na $\mathbb{R}$.