

**Písemná zkouška z Matematiky IV pro FSV (C)**  
**LS 2014/2015**

---

**Úloha 1** (10 bodů). Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y^{(5)}(t) - y^{(4)}(t) + y'(t) - y(t) = 102 \sin(-2t) - 51 \cos(-2t).$$

**Úloha 2** (14 bodů). Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y' \cos(x) = y \log(y).$$

a načrtněte jejich průběh.

**Úloha 3** (10 bodů). Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y' + \frac{\sin(x)}{\cos(x) + 1} y = \cos(x).$$

**Úloha 4** (12 bodů). Popište průběh a načrtněte graf maximálních řešení rovnice

$$y' \sqrt[3]{y-1} \arctan(y-1) = (\arctan(y) - 1)(y-1)^2.$$

**Úloha 5** (14 bodů). Najděte všechny funkce  $z$  a  $w$ , pro které existují funkce  $x$  a  $y$ , že vektorová funkce  $[x, y, z, w]$  je maximální řešení následující soustavy

$$\begin{aligned}x'(t) &= x(t) - y(t) - z(t) + w(t), \\y'(t) &= x(t) + y(t) + z(t) + w(t), \\z'(t) &= x(t) - y(t) + z(t) - w(t) + t + 1, \\w'(t) &= -x(t) - y(t) + z(t) + w(t) + t - 1.\end{aligned}$$

---

**Řešení**

---

**Úloha 1.**  $y(t) = Ae^t + e^{\frac{t}{\sqrt{2}}} \left( B \cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + C \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \right) + e^{-\frac{t}{\sqrt{2}}} \left( D \cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + E \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \right) + 3 \cos(-2t)$ ,  
 $A, B, C, D, E \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$ .

**Úloha 2.**  $y(x) = 1$  na  $\mathbb{R}$  a  $y(x) = e^{C \frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}}$  pro  $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  na  $\left(\frac{-3\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Úloha 3.**  $y(x) = (\cos(x) + 1) \left( C + x - \tan\left(\frac{x}{2}\right) \right)$  pro  $C \in \mathbb{R}$  na  $(-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Úloha 4.** Rovnice má stacionární řešení  $y(x) = 1$  a  $y(x) = \tan(1)$  na  $\mathbb{R}$ . Maximální řešení s hodnotami v intervalu  $(-\infty, 1]$  jsou slepena z klesajícího řešení definovaného na intervalu typu  $(A, B)$ ,  $A, B \in \mathbb{R}$ , a stacionárního řešení  $y(x) = 1$ . Maximální řešení s hodnotami v intervalu  $[1, \tan(1))$  jsou slepena z klesajícího řešení definovaného na intervalu typu  $(-\infty, B)$ ,  $B \in \mathbb{R}$ , a stacionárního řešení  $y(x) = 1$ . Maximální řešení s hodnotami v intervalu  $(-\infty, \tan(1))$  jsou slepena z klesajícího řešení definovaného na intervalu typu  $(-\infty, B)$ ,  $B \in \mathbb{R}$ , stacionárního řešení  $y(x) = 1$  a klesajícího řešení definovaného na intervalu typu  $(C, D)$ ,  $C, D \in \mathbb{R}$ . Maximální řešení s hodnotami v intervalu  $(\tan(1), +\infty)$  jsou rostoucí a definované na intervalu typu  $(-\infty, B)$ ,  $B \in \mathbb{R}$ .

**Úloha 5.** Maximální řešení jsou funkce  $w(t) = \frac{3}{4} + e^t(A \cos(\sqrt{3}t) + B \sin(\sqrt{3}t))$ ,  $z(t) = -\frac{1}{2}t + e^t(C \cos(\sqrt{3}t) + D \sin(\sqrt{3}t))$  na  $\mathbb{R}$ , kde  $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ .