Písemná zkouška z Matematiky IV pro FSV (B)
LS 2014/2015

Úloha 1 (11 bodů)**.** Najděte všechna řešení rovnice

$$y(n+3) - 3y(n+1) - 2y(n) = -4n - 5 \cdot 2^{n+2} - 20$$

Úloha 2 (13 bodů)**.** Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y'(x^2-1) = y^2+1.$$

a načrtněte jejich průběh.

Úloha 3 (12 bodů)**.** Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = \frac{e^{-x}}{x}.$$

Úloha 4 (10 bodů)**.** Popište průběh a načrtněte graf maximálních řešení rovnice

$$y' \log(1+y^2) = \left(2^y - \frac{1}{2}\right) \arctan y.$$

Úloha 5 (14 bodů)**.** Najděte všechna maximální řešení soustavy

$$\begin{aligned} x' &= 13x - 12y - 6z, \\ y' &= 9x - 11y - 3z, \\ z' &= -9x + 6y - 2z + 3. \end{aligned}$$

Řešení

Úloha 1. $y(n) = (A+Bn)(-1)^n + \left(C - \frac{10}{9}n\right) 2^n + n + 5$, $A, B, C \in \mathbb{R}$.

Úloha 2. $y = \tan\left(\frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C\right)$ pro $C \in \mathbb{R}$ na $\left(\frac{2}{1+e^{\pi-2C}} - 1, \frac{2}{1+e^{-\pi-2C}} - 1\right)$, pro $C \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ na $\left(\frac{2}{1-e^{-\pi-2C}} - 1, \frac{2}{1-e^{\pi-2C}} - 1\right)$, pro $C \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ na $(-\infty, \frac{2}{1-e^{\pi-2C}} - 1)$ a pro $C \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ na $(\frac{2}{1-e^{-\pi-2C}} - 1, +\infty)$.

Úloha 3. $y(x) = e^{-x}\left(A + Bx + Cx^2 + \frac{1}{2}x^2 \log|x|\right)$, $A, B, C \in \mathbb{R}$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$.

Úloha 4. Rovnice má stacionární řešení $y(x) = -1$ a $y(x) = 0$ na $\mathbb{R}$. Maximální řešení s hodnotami v intervalu $(-\infty, -1)$ jsou rostoucí a definované na $\mathbb{R}$. Maximální řešení s hodnotami v intervalu $(-1, 0)$ jsou klesající a definované na intervalu typu $(A, +\infty)$, $A \in \mathbb{R}$. Maximální řešení s hodnotami v intervalu $(0, +\infty)$ jsou rostoucí a definované na intervalu typu (A, B), $A, B \in \mathbb{R}$.

Úloha 5. Maximální řešení jsou funkce $x(t) = \frac{1}{3}\left((2C+B)e^{-5t} - 6Ae^{10t} + \frac{27}{25}\right)$, $y(t) = Ce^{-5t} - Ae^{10t} + \frac{9}{50}$, $z(t) = Be^{-5t} + Ae^{10t} + \frac{21}{50}$ na $\mathbb{R}$, kde $A, B, C \in \mathbb{R}$.