Písemná zkouška z Matematiky IV pro FSV (A)
LS 2014/2015

Úloha 1 (9 bodů)**.** Najděte všechna řešení rovnice

$$y_{n+3} + 3y_{n+2} - 4y_n = 18n + 12$$

Úloha 2 (12 bodů)**.** Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$2y' - yy' - 1 + x = 0.$$

a načrtněte jejich průběh.

Úloha 3 (10 bodů)**.** Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y' + y\frac{x^3 + 10x}{x^4 + 5x^2} = e^{2x}\frac{\sqrt{x^2+5}}{x}.$$

Úloha 4 (15 bodů)**.** Popište průběh a načrtněte graf maximálních řešení rovnice

$$y' = \frac{\sqrt{1-\cos^2 y}\,\sqrt[3]{y^2-1}}{\log((1+y)^2)}.$$

Úloha 5 (14 bodů)**.** Nalezněte fundamentální matici soustavy

$$\begin{aligned} x' &= 6x + y + 5z, \\ y' &= 4x + y + 3z, \\ z' &= -12x + y - 9z. \end{aligned}$$

Řešení

Úloha 1. $y_n = c_1(-2)^n + n(c_2(-2)^n + n - 1) + c_3$.

Úloha 2. $y = x + 1$ a $y = 3 - x$ na $\mathbb{R}$ a $y = 2 \pm \sqrt{x^2 - 2x + 4 - 2C}$ pro $C < \frac{3}{2}$ na $\mathbb{R}$ a pro $C > \frac{3}{2}$ na $(-\infty, 1 - \sqrt{2C-3})$ a na $(1 + \sqrt{2C-3}, +\infty)$.

Úloha 3. $y(x) = \frac{\sqrt{x^2+5}}{x^2}(K + e^{2x}\frac{2x-1}{4})$, $K \in \mathbb{R}$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$.

Úloha 4. Rovnice má stacionární řešení $y(x) = 1$ na $\mathbb{R}$ a dále nekonečně mnoho stacionárních řešení $y(x) = k\pi$ na $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Maximální řešení s hodnotami v intervalech $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0\}$ jsou rostoucí a definované na $\mathbb{R}$. Maximální řešení s hodnotami v intervalu $(-\pi, -2)$ jsou rostoucí a definované na intervalu typu $(-\infty, A)$, $A \in \mathbb{R}$. Maximální řešení s hodnotami v intervalu $(-2, -1)$ jsou klesající a definované na omezeném intervalu typu (A, B), $A, B \in \mathbb{R}$. Maximální řešení s hodnotami v intervalu $(-1, 0)$ jsou rostoucí a definované na omezeném intervalu typu (A, B), $A, B \in \mathbb{R}$. Maximální řešení s hodnotami v intervalu $(0, 1]$ jsou slepena z klesajícího řešení definovaného na intervalu typu (A, B), $A, B \in \mathbb{R}$, a stacionárního řešení $y(x) = 1$. Maximální řešení s hodnotami v intervalu $[1, \pi)$, jsou slepena z rostoucího řešení definovaného na intervalu typu $(A, +\infty)$, $A \in \mathbb{R}$, a stacionárního řešení $y(x) = 1$.

Úloha 5. $\begin{pmatrix} (3t+1)e^{-2t} & 3e^{-2t} & e^{2t} \\ te^{-2t} & e^{-2t} & e^{2t} \\ (-5t-1)e^{-2t} & -5e^{-2t} & -e^{2t} \end{pmatrix}$