

MATEMATICKÁ ANALÝZA 2

POČETNÍ PŘÍKLADY NA URČITÝ INTEGRÁL

ZE SBÍRKY LUBOŠE PICKA

6. URČITÝ INTEGRÁL

Příklad 6.1. Spočtěte Newtonův integrál

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^{4x} + 4e^{3x} - e^{2x} - 2e^x}{(e^{2x} + 1)(2e^{2x} + 3e^x + 1)} dx.$$

Příklad 6.2. Spočtěte Newtonův integrál

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}}}.$$

Příklad 6.3. Spočtěte Newtonův integrál

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 + \sqrt{x^2 + x + 1}}.$$

Příklad 6.4. Spočtěte Newtonův integrál

$$\int_2^{\infty} \frac{\sqrt{y} - 1}{(y + 2)(\sqrt{y} + 1)\sqrt{y}} dy.$$

Příklad 6.5. Spočtěte Newtonův integrál

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2t}{\sqrt{\sin^2 t + 3 \sin t + 1}} dt.$$

Příklad 6.6. Spočtěte Newtonův integrál

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x + 2}{(\cos(2x) + \sin^2 x)(\operatorname{tg} x + 1)(\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x + 3)} dx.$$

Příklad 6.7. Spočtěte Newtonův integrál

$$\int_{16}^{\infty} \frac{2y^{\frac{3}{2}} - 5y + 8\sqrt{y} - 1}{(y - 2\sqrt{y} - 3)\sqrt{y}(y - \sqrt{y} + 2)} dy$$

Výsledky. • Příklad 6.1: Označme

$$I := \int_{-\infty}^0 \frac{e^{4x} + 4e^{3x} - e^{2x} - 2e^x}{(e^{2x} + 1)(2e^{2x} + 3e^x + 1)} dx.$$

Použijeme substituci $y = e^x$, pak $y \in (0, 1)$. Protože $dy = e^x dx$, máme

$$I = \int_0^1 \frac{y^3 + 4y^2 - y - 2}{(y^2 + 1)(2y^2 + 3y + 1)} dy.$$

Rozložíme integrand na parciální zlomky:

$$\frac{y^3 + 4y^2 - y - 2}{(y^2 + 1)(2y^2 + 3y + 1)} = \frac{Ay + B}{y^2 + 1} + \frac{C}{2y + 1} + \frac{D}{y + 1}$$

Použitím cover-up rule, tj. dosazením $y = -\frac{1}{2}$ a $y = -1$ dostaneme ihned $C = D = -1$, pak dosazením například $y = 0$ vypočítáme $B = 0$ a konečně dosazením

například $y = 1$ dostaneme $A = 2$. Celkem

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\frac{2y}{y^2 + 1} - \frac{1}{2y + 1} - \frac{1}{y + 1} \right) dy \\ &= \left[\log(y^2 + 1) - \frac{1}{2} \log(2y + 1) - \log(y + 1) \right]_{y=0}^{y=1} \\ &= -\frac{1}{2} \log 3. \end{aligned}$$

- Příklad 6.2:

$$\frac{1}{8} \log \left| \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \right| + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{2} - 1} - \frac{1}{(\sqrt{2} - 1)^2} \right)$$

- Příklad 6.4:

$$\frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{4\sqrt{2}} - 2 \log \frac{2}{\sqrt{2} + 1} \right)$$

- Příklad 6.5:

$$\sqrt{5} - 2 + 3 \log(5 - 2\sqrt{5}) + \frac{5}{2} \left(\frac{1}{5 - 2\sqrt{5}} - 1 \right)$$

- Příklad 6.6:

$$\frac{1}{4} \log \frac{3}{2} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

- Příklad 6.7: ∞ (integrál existuje, ale nekonverguje)