Příklad na průběh funkce ze cvičení 24

Vyšetřete průběh funkce $f(x)=e^{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2-1}\right)}$.

Řešení (bez mezivýpočtů)

1) Definiční obor

$$\left.\begin{array}{l} D\left(\frac{1}{x^2-1}\right)=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\} \\ D(\operatorname{arctg})=\mathbb{R} \\ D(\exp)=\mathbb{R}\end{array}\right\} D(f)=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$$

2) spojitost: funkce je spojitá na celém $D(f)$, neboť je složením spojitých funkcí $(\exp, \operatorname{arctg}, \frac{1}{x^2-1})$

3) symetrie, průsečíky s osami

funkce f je sudá, neboť $e^{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2-1}\right)}=e^{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{(-x)^2-1}\right)}$

funkce f není lichá (např. $f(-1)\neq -f(1)$)

funkce f není periodická (z tvaru definičního oboru)

průsečík s osou y: $f(0)=e^{\operatorname{arctg}(-1)}=e^{-\frac{\pi}{4}}$

průsečík s osou x neexistuje, neboť exp je kladná na $\mathbb{R}$.

4) limity v krajních bodech

$\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=e^{\frac{\pi}{2}}$ (VOLSF (P) pro $\frac{1}{y}\xrightarrow[y\to 0+]{}\infty$ a $x^2-1\to 0$, $x^2-1>0$ na $P_+(1,1)$, VOLSF (P) pro arctg, VOLSF (S) pro exp)

$\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=e^{-\frac{\pi}{2}}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1-} f(x)=e^{\frac{\pi}{2}} \\ \lim\limits_{x\to -1+} f(x)=e^{-\frac{\pi}{2}}\end{array}\right\} \text{ze sudosti}$$

$\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x)=1$

5) asymptoty

$$\text{v } \infty: \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0 \Rightarrow a=0 \\ \lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax)=1 \Rightarrow b=1\end{array}\right\} \text{Asymptota } f \text{ v } \infty \text{ je } y=1$$

v $-\infty$: obdobně nebo ze symetrie: Asymptota f v $-\infty$ je $y=1$.

6) první derivace

$f'(x)=e^{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2-1}\right)}\cdot\frac{-2x}{(x^2-1)^2+1}$, $x\in D(f)$

7) monotonie

f je spojitá na $D(f)$ a $f'(x) > 0$ pro $x < 0$
$f'(x) < 0$ pro $x > 0$

Funkce je tedy rostoucí na $(-\infty, -1)$ a $(-1, 0]$
a klesající na $[0, 1)$ a $(1, \infty)$

! Byla by chyba psát sjednocení intervalů, nebyla by to pravda

8) extrémy

Body podezřelé z extrému: 0 (v ostatních bodech $D(f)$ $\exists f' \neq 0$)
f je rostoucí na $(-1, 0]$ a klesající na $[0, 1)$ $\Rightarrow$ 0 je bodem lokálního maxima, $f(0) = e^{-\frac{\pi}{4}}$

9) Obor hodnot

- f je rostoucí a spojitá na $(-\infty, -1)$ a limity v krajních bodech jsou 1 a $e^{\frac{\pi}{2}}$ $\Rightarrow f((-\infty, -1)) = (1, e^{\frac{\pi}{2}})$
- f je rostoucí a spojitá na $(-1, 0]$ a limity v krajních bodech jsou $e^{-\frac{\pi}{2}}$ a $e^{-\frac{\pi}{4}}$ $\Rightarrow f((-1, 0]) = (e^{-\frac{\pi}{2}}, e^{-\frac{\pi}{4}}]$
- f je sudá

$\Rightarrow H(f) = (e^{-\frac{\pi}{2}}, e^{-\frac{\pi}{4}}] \cup (1, e^{\frac{\pi}{2}})$

10) druhá derivace

$$f''(x) = e^{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2-1}\right)} \frac{6x^4 - 4}{((x^2-1)^2+1)^2}, \quad x \in D(f)$$

11) konvexita / konkávnost

f a f' jsou spojité na $D(f)$ a $f''(x) > 0 \iff 6x^4 - 4 > 0$

$$x^4 - \frac{2}{3} > 0$$

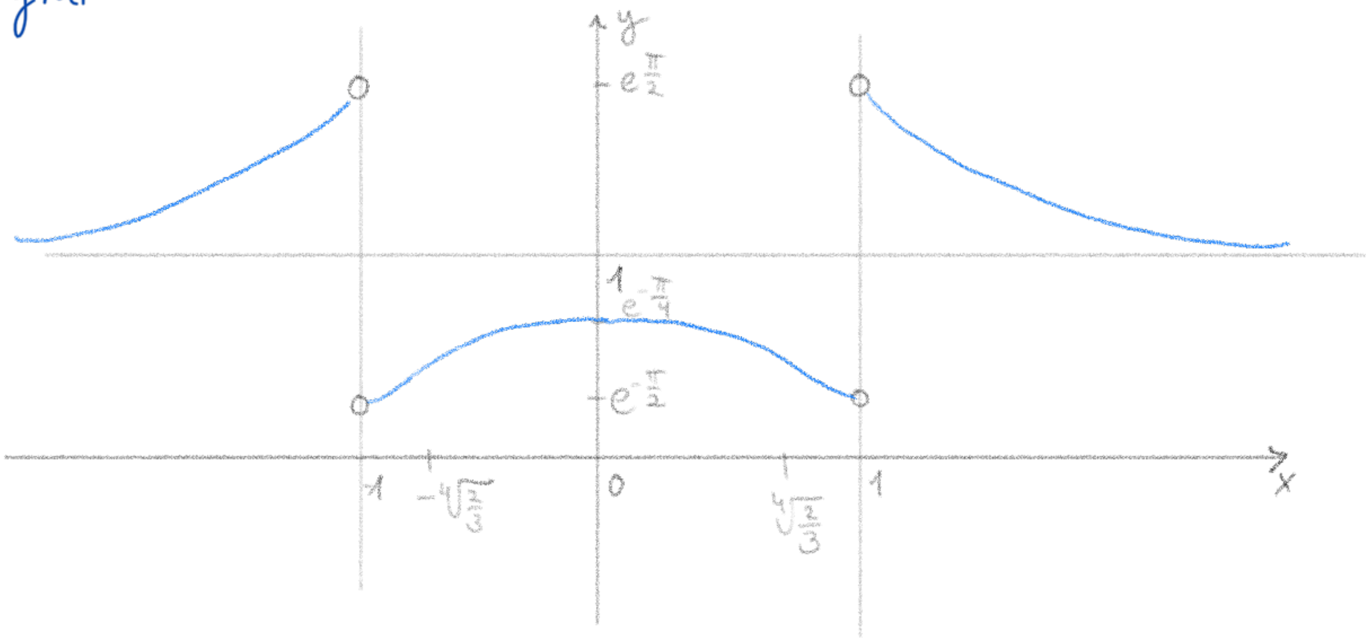
$$\left(x - \sqrt[4]{\tfrac{2}{3}}\right)\left(x + \sqrt[4]{\tfrac{2}{3}}\right)\left(x^2 + \sqrt{\tfrac{2}{3}}\right) > 0$$

f je ryze konvexní na $(-\infty, 1), (1, -\sqrt[4]{\frac{2}{3}}], [\sqrt[4]{\frac{2}{3}}, 1), (1, \infty)$
f je ryze konkávní na $[-\sqrt[4]{\frac{2}{3}}, \sqrt[4]{\frac{2}{3}}]$

12) inflexní body

Body podezřelé z inflexe: $-\sqrt[4]{\frac{2}{3}}, \sqrt[4]{\frac{2}{3}}$ (v ostatních bodech $\exists f'' \neq 0$)
f'' v těchto bodech mění znaménko $\Rightarrow$ jedná se o inflexní body.

13) graf



y
$e^{\frac{\pi}{2}}$
1
$e^{-\frac{\pi}{4}}$
$e^{-\frac{\pi}{2}}$
-1
$-\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$
0
$\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$
1
x