Písemkové příklady na implicitní funkce (LS 97/98)

Příklad A: Ukažte, že rovnice

$$\sin(xy) + \cos(xy) = 1$$

určuje v jistém okolí bodu $[\pi, 0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě π.

Příklad B: Ukažte, že rovnice

$$2x^4y + x^3 + y^3 + xy = 1$$

určuje v jistém okolí bodu $[1, 0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 1.

Příklad C: Ukažte, že rovnice

$$\log(x^2 + y^2 + \cos(xy)) + y = 0$$

určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0.

Příklad D: Ukažte, že rovnice

$$\log(x + \operatorname{arctg} y + 1) + xy = 0$$

určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0.

Příklad E: Ukažte, že rovnice

$$x^y + y^x = 2y$$

určuje v jistém okolí bodu $[1, 1]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 1.

Příklad F: Ukažte, že rovnice

$$y^3x^2 + y^2x^2 + \sin y = 0$$

určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0.

Příklad G: Ukažte, že rovnice

$$e^{\sin x^2} + e^{\sin xy} = 2y + 2$$

určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0.

Příklad H: Ukažte, že rovnice

$$\pi/2 + \arcsin(x + y^2) = \arccos(y + x^2)$$

určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0.

Příklad I: Ukažte, že rovnice

$$\operatorname{arctg}(y^2 + xy) = e^{xy} - \cos x + y$$

určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0.

Řešení

Příklad A: Položme
$$F(x,y) = \sin(xy) + \cos(xy) - 1.$$
Funkce F je definována na $\mathbb{R}^2$ a pro její parciální derivace platí:
$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \cos(xy)\cdot y - \sin(xy)\cdot y,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \cos(xy)\cdot x - \sin(xy)\cdot x.$$

Obě parciální derivace jsou na $\mathbb{R}^2$ spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Dále platí $F(\pi,0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(\pi,0) = \pi \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[\pi,0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\sin(x\varphi(x)) + \cos(x\varphi(x)) = 1,$$
$$\cos(x\varphi(x))\cdot(\varphi(x) + x\varphi'(x)) - \sin(x\varphi(x))\cdot(\varphi(x) + x\varphi'(x)) = 0,$$
$$-\sin(x\varphi(x))\cdot(\varphi(x) + x\varphi'(x))^2 + \cos(x\varphi(x))\cdot(2\varphi'(x) + x\varphi''(x))$$
$$-\cos(x\varphi(x))\cdot(\varphi(x) + x\varphi'(x))^2 - \sin(x\varphi(x))\cdot(2\varphi'(x) + x\varphi''(x)) = 0.$$

Dosadíme-li $x = \pi$ a použijeme-li $\varphi(\pi) = 0$, dostaneme $\varphi'(\pi) = 0$ a $\varphi''(\pi) = 0$.

Příklad B: Položme
$$F(x,y) = 2x^4y + x^3 + y^3 + xy - 1.$$
Funkce F je definována na $\mathbb{R}^2$ a pro její parciální derivace platí:
$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 8x^3y + 3x^2 + y,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2x^4 + 3y^2 + x.$$

Obě parciální derivace jsou na $\mathbb{R}^2$ spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Dále platí $F(1,0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(1,0) = 3 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[1,0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$2x^4\varphi(x) + x^3 + \varphi(x)^3 + x\varphi(x) - 1 = 0,$$
$$8x^3\varphi(x) + 2x^4\varphi'(x) + 3x^2 + 3\varphi(x)^2\varphi'(x) + \varphi(x) + x\varphi'(x) = 0,$$
$$24x^2\varphi(x) + 8x^3\varphi'(x) + 8x^3\varphi'(x) + 2x^4\varphi''(x) + 6x + 6\varphi(x)(\varphi'(x))^2 + 3\varphi(x)^2\varphi''(x)$$
$$+\varphi'(x) + \varphi'(x) + x\varphi''(x) = 0.$$

Dosadíme-li $x = 1$ a použijeme-li $\varphi(1) = 0$, dostaneme $\varphi'(1) = -1$ a $\varphi''(1) = 4$.

Příklad C: Položme

$$F(x,y) = \log(x^2 + y^2 + \cos(xy)) + y.$$

Funkce F je definována na jisté otevřené množině G (lze ukázat, že dokonce $G = \mathbb{R}^2$) obsahující bod $[0,0]$ a pro její parciální derivace platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + \cos(xy)} \cdot (2x - \sin(xy) \cdot y),$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + \cos(xy)} \cdot (2y - \sin(xy) \cdot x) + 1.$$

Obě parciální derivace jsou na G spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(G)$. Dále platí $F(0,0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0,0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$.

Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\log(x^2 + \varphi(x)^2 + \cos(x\varphi(x))) + \varphi(x) = 0,$$
$$\frac{1}{x^2 + \varphi(x)^2 + \cos(x\varphi(x))} \cdot (2x + 2\varphi(x)\varphi'(x) - \sin(x\varphi(x))(\varphi(x) + x\varphi'(x))) + \varphi'(x) = 0,$$
$$\begin{aligned}\frac{-1}{(x^2 + \varphi(x)^2 + \cos(x\varphi(x)))^2} &\cdot (2x + 2\varphi(x)\varphi'(x) - \sin(x\varphi(x))(\varphi(x) + x\varphi'(x)))^2 \\ +\frac{1}{x^2 + \varphi(x)^2 + \cos(x\varphi(x))} &\cdot (2 + 2(\varphi'(x))^2 + 2\varphi(x)\varphi''(x) \\ - \cos(x\varphi(x))(\varphi(x) + x\varphi'(x))^2 &- \sin(x\varphi(x))(2\varphi'(x) + x\varphi''(x))) + \varphi''(x) = 0.\end{aligned}$$

Dosadíme-li $x = 0$ a použijeme-li $\varphi(0) = 0$, dostaneme $\varphi'(0) = 0$ a $\varphi''(0) = -2$.

Příklad D: Položme

$$F(x,y) = \log(x + \operatorname{arctg} y + 1) + xy.$$

Funkce F je definována na jisté otevřené množině G obsahující bod $[0,0]$ a pro její parciální derivace platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x + \operatorname{arctg} y + 1} + y,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x + \operatorname{arctg} y + 1} \cdot \frac{1}{1 + y^2} + x.$$

Obě parciální derivace jsou na G spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(G)$. Dále platí $F(0,0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0,0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\log(x + \operatorname{arctg} \varphi(x) + 1) + x\varphi(x) = 0,$$
$$\frac{1}{x + \operatorname{arctg} \varphi(x) + 1} \cdot \left(1 + \frac{\varphi'(x)}{1 + \varphi(x)^2}\right) + \varphi(x) + x\varphi'(x) = 0,$$
$$\begin{aligned}\frac{-1}{(x + \operatorname{arctg} \varphi(x) + 1)^2} &\cdot \left(1 + \frac{\varphi'(x)}{1 + \varphi(x)^2}\right)^2 \\ +\frac{1}{x + \operatorname{arctg} \varphi(x) + 1} &\cdot \frac{\varphi''(x)(1 + \varphi(x)^2) - 2\varphi'(x)\varphi'(x)\varphi(x)}{(1 + \varphi(x)^2)^2} \\ &+\varphi'(x) + \varphi'(x) + x\varphi''(x) = 0,\end{aligned}$$

Dosadíme-li $x = 0$ a použijeme-li $\varphi(0) = 0$, dostaneme $\varphi'(0) = -1$ a $\varphi''(0) = 2$.

Příklad E: Položme
$$F(x,y) = x^y + y^x - 2y.$$
Funkce F je definována na otevřené množině $G = (0,+\infty) \times (0,+\infty)$, která obsahuje bod $[1,1]$. Pro parciální derivace F platí:
$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = yx^{y-1} + y^x \log y,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = x^y \log x + xy^{x-1} - 2.$$

Obě parciální derivace jsou na G spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(G)$. Dále platí $F(1,1) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(1,1) = -1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[1,1]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu
$$x^{\varphi(x)} + \varphi(x)^x - 2\varphi(x) = 0.$$
Tento vztah si přepišme na tvar
$$e^{\varphi(x)\log x} + e^{x \log \varphi(x)} - 2\varphi(x) = 0.$$
Nyní postupně obdržíme
$$e^{\varphi(x)\log x} \cdot \left(\varphi'(x)\log x + \frac{\varphi(x)}{x}\right) + e^{x\log\varphi(x)} \cdot \left(\log\varphi(x) + \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right) - 2\varphi'(x) = 0,$$
$$e^{\varphi(x)\log x} \cdot \left(\varphi'(x)\log x + \frac{\varphi(x)}{x}\right)^2 + e^{\varphi(x)\log x} \cdot \left(\varphi''(x)\log x + 2\frac{\varphi'(x)}{x} - \frac{\varphi(x)}{x^2}\right)$$
$$+e^{x\log\varphi(x)} \cdot \left(\log\varphi(x) + \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right)^2$$
$$+e^{x\log\varphi(x)} \cdot \left(\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + \frac{(\varphi'(x) + x\varphi''(x))\varphi(x) - x\varphi'(x)\varphi'(x)}{\varphi(x)^2}\right) - 2\varphi''(x) = 0.$$
Dosadíme-li $x = 1$ a použijeme-li $\varphi(1) = 1$, dostaneme $\varphi'(1) = 1$ a $\varphi''(1) = 4$.

Příklad F: Položme
$$F(x,y) = y^3x^2 + y^2x^2 + \sin y.$$
Funkce F je definována na $\mathbb{R}^2$. Pro parciální derivace F platí:
$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 2y^3x + 2y^2x,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 3y^2x^2 + 2yx^2 + \cos y.$$

Obě parciální derivace jsou na $\mathbb{R}^2$ spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Dále platí $F(0,0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0,0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu
$$\varphi(x)^3x^2 + \varphi(x)^2x^2 + \sin\varphi(x) = 0.$$
Postupně obdržíme
$$3\varphi(x)^2\varphi'(x)x^2 + 2\varphi(x)^3x + 2\varphi(x)\varphi'(x)x^2 + 2\varphi(x)^2x + \cos\varphi(x)\cdot\varphi'(x) = 0,$$
$$6\varphi(x)\varphi'(x)\varphi'(x)x^2 + 3\varphi(x)^2\varphi''(x)x^2 + 6\varphi(x)^2\varphi'(x)x + 6\varphi(x)^2\varphi'(x)x$$
$$+2\varphi(x)^3 + 2\varphi'(x)\varphi'(x)x^2 + 2\varphi(x)\varphi''(x)x^2 + 4\varphi(x)\varphi'(x)x$$
$$+4\varphi(x)\varphi'(x)x + 2\varphi(x)^2 - \sin\varphi(x)\cdot\varphi'(x)\varphi'(x) + \cos\varphi(x)\cdot\varphi''(x) = 0.$$

Dosadíme-li $x = 0$ a použijeme-li $\varphi(0) = 0$, dostaneme $\varphi'(0) = 0$ a $\varphi''(0) = 0$.

Příklad G: Položme

$$F(x,y) = e^{\sin x^2} + e^{\sin xy} - 2y - 2.$$

Funkce F je definována na $\mathbb{R}^2$. Pro parciální derivace F platí:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) &= e^{\sin x^2} \cdot \cos x^2 \cdot 2x + e^{\sin xy} \cdot \cos xy \cdot y, \\
\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) &= e^{\sin xy} \cdot \cos xy \cdot x - 2.
\end{aligned}$$

Obě parciální derivace jsou na $\mathbb{R}^2$ spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Dále platí $F(0,0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = -2 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0,0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$e^{\sin x^2} + e^{\sin x\varphi(x)} - 2\varphi(x) - 2 = 0.$$

Postupně obdržíme

$$\begin{gathered}
e^{\sin x^2} \cdot \cos x^2 \cdot 2x + e^{\sin x\varphi(x)} \cos x\varphi(x) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x)) - 2\varphi'(x) = 0, \\
e^{\sin x^2} \cdot (\cos x^2 \cdot 2x)^2 - e^{\sin x^2} \cdot \sin x^2 \cdot 4x^2 \\
+ e^{\sin x^2} \cdot \cos x^2 \cdot 2 + e^{\sin x\varphi(x)} (\cos x\varphi(x) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x)))^2 \\
- e^{\sin x\varphi(x)} \sin x\varphi(x) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x))^2 + e^{\sin x\varphi(x)} \cos x\varphi(x) \cdot (2\varphi'(x) + x\varphi''(x)) \\
-2\varphi''(x) = 0.
\end{gathered}$$

Dosadíme-li $x = 0$ a použijeme-li $\varphi(0) = 0$, dostaneme $\varphi'(0) = 0$ a $\varphi''(0) = 1$.

Příklad H: Položme

$$F(x,y) = \pi/2 + \arcsin(x + y^2) - \arccos(y + x^2).$$

Bod $[0,0]$ je ve vnitřku definičního oboru funkce F - můžeme tedy spočítat parciální derivace funkce F na jistém okolí G bodu $[0,0]$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{1 - (x + y^2)^2}} + \frac{2x}{\sqrt{1 - (y + x^2)^2}} \\
\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) &= \frac{2y}{\sqrt{1 - (x + y^2)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - (y + x^2)^2}}.
\end{aligned}$$

Obě parciální derivace jsou na jistém okolí bodu $[0,0]$ spojité a navíc tam jsou jejich parciální derivace spojité, tj. $f \in \mathcal{C}^2(G)$. Dále platí $F(0,0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0,0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\begin{gathered}
\arcsin(x + (\varphi(x))^2) + \pi/2 - \arccos(\varphi(x) + x^2) = 0, \\
\frac{1 + 2\varphi(x)\varphi'(x)}{\sqrt{1 - (x + (\varphi(x))^2)^2}} + \frac{\varphi'(x) + 2x}{\sqrt{1 - (\varphi(x) + x^2)^2}} = 0, \\
-\frac{1}{2}(1 - (x + (\varphi(x))^2)^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2(x + (\varphi(x))^2)) \cdot (1 + 2\varphi(x)\varphi'(x))^2 \\
+(1 - (x + (\varphi(x))^2)^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2(\varphi'(x))^2 + 2\varphi(x)\varphi''(x)) \\
-\frac{1}{2}(1 - (\varphi(x) + x^2)^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2(\varphi(x) + x^2)) \cdot (\varphi'(x) + 2x)^2 \\
+(1 - (\varphi(x) + x^2)^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (\varphi''(x) + 2) = 0.
\end{gathered}$$

Dosadíme-li $x = 0$ a využijeme-li $\varphi(0) = 0$, dostaneme $\varphi'(0) = -1$ a $\varphi''(0) = -4$.

Příklad I: Položme

$$F(x,y) = \operatorname{arctg}(y^2 + xy) - e^{xy} + \cos x - y.$$

Funkce F je definována na $\mathbb{R}^2$ a pro její parciální derivace platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{1+(y^2+xy)^2} - e^{xy}y - \sin x,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{2y+x}{1+(y^2+xy)^2} - e^{xy}x - 1.$$

Obě parciální derivace jsou na $\mathbb{R}^2$ spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Dále platí $F(0,0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = -1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0,0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\operatorname{arctg}((\varphi(x))^2 + x\varphi(x)) - e^{x\varphi(x)} + \cos x - \varphi(x) = 0.$$

$$\frac{2\varphi(x)\varphi'(x) + \varphi(x) + x\varphi'(x)}{1+((\varphi(x))^2 + x\varphi(x))^2} - (\varphi(x) + x\varphi'(x))e^{x\varphi(x)} - \sin x - \varphi'(x) = 0,$$

$$\begin{aligned}&\frac{-2((\varphi(x))^2 + x\varphi(x))}{(1+((\varphi(x))^2 + x\varphi(x))^2)^2} \cdot (2\varphi(x)\varphi'(x) + \varphi(x) + x\varphi'(x))^2 \\ &+ \frac{2(\varphi'(x))^2 + 2\varphi(x)\varphi''(x) + \varphi'(x) + \varphi'(x) + x\varphi''(x)}{1+((\varphi(x))^2 + x\varphi(x))^2} \\ &-(\varphi'(x) + \varphi'(x) + x\varphi''(x))e^{x\varphi(x)} - (\varphi(x) + x\varphi'(x))^2 e^{x\varphi(x)} \\ &- \cos x - \varphi''(x) = 0.\end{aligned}$$

Dosadíme-li $x = 0$ a použijeme-li $\varphi(0) = 0$, dostaneme $\varphi'(0) = 0$ a $\varphi''(0) = -1$.