Písemkové příklady na parciální derivace (LS 97/98)

Příklad A: Určete definiční obor funkce f, spočtěte její parciální derivace všude, kde existují a napište rovnici tečné roviny v bodě $[0,1]$;

$$f(x,y)=\sqrt{y+\sin x}.$$

Příklad B: Určete definiční obor funkce f, spočtěte její parciální derivace všude, kde existují a napište rovnici tečné roviny v bodě $[1,2]$;

$$f(x,y)=|x^2-y^2|.$$

Příklad C: Určete definiční obor funkce f, spočtěte její parciální derivace všude, kde existují a napište rovnici tečné roviny v bodě $[1,2]$;

$$f(x,y)=\sqrt[3]{\log\left(\frac{x}{y}\right)}.$$

Příklad D: Určete definiční obor funkce f, spočtěte její parciální derivace všude, kde existují, a napište rovnici tečné roviny v bodě $[1,2]$;

$$f(x,y)=e^{x^2-y}+7y+|xy|.$$

Příklad E: Určete definiční obor funkce f, spočtěte její parciální derivace všude, kde existují, a napište rovnici tečné roviny v bodě $[1,2]$;

$$f(x,y)=\min\{x^2+y^2,2-x^2-y^2\}.$$

Příklad F: Určete definiční obor funkce f, spočtěte její parciální derivace všude, kde existují, a napište rovnici tečné roviny v bodě $[1,2]$;

$$f(x,y)=x^{(y^x)}.$$

Příklad G: Určete definiční obor funkce f, spočtěte její parciální derivace všude, kde existují, a napište rovnici tečné roviny v bodě $[1,2]$;

$$f(x,y)=(\operatorname{arctg}(\sqrt{x^2+y^2}))^4.$$

Příklad H: Určete definiční obor funkce f, určete kde existují vlastní parciální derivace a spočtěte je; napište rovnici tečné roviny v bodě $[1,2]$;

$$f(x,y)=\begin{cases}\sin(x\cos y) & x\geq 0\\ \cos(x\sin y)+2 & x<0\end{cases}.$$

Příklad I: Určete definiční obor funkce f, spočtěte její parciální derivace všude kde existují a napište rovnici tečné roviny v bodě $[1,2]$;

$$f(x,y)=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x+y-1}.$$

Řešení

Příklad A: Funkce f je definována na množině $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ \sin x + y \geq 0\}$. V bodech, kde $y + \sin x > 0$, můžeme počítat derivaci „podle vzorečků“:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2}(y + \sin x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos x,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2}(y + \sin x)^{-\frac{1}{2}}.$$

V bodech kde $y + \sin x = 0$ nemůže parciální derivace f podle y existovat. Parciální derivace podle x může existovat jen v bodech tvaru $[3\pi/2 + 2k\pi, 1], k \in \mathbb{Z}$. Zkusme počítat podle definice

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(3\pi/2 + 2k\pi, 1) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(3\pi/2 + 2k\pi + t, 1) - f(3\pi/2 + 2k\pi, 1)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{1 + \sin(3\pi/2 + 2k\pi + t)}}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{1 - \cos t}}{t}.\end{aligned}$$

Poslední limita neexistuje protože limita zleva $(-1/\sqrt{2})$ se nerovná limitě zprava $(1/\sqrt{2})$. Parciální derivace funkce f existují pouze na vnitřku množiny M a jsou tam spojité. Proto v bodě $[0, 1]$ existuje totální diferenciál, a tedy tečná rovina, která má tvar

$$z = 1 + \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot (y - 1).$$

Příklad B: Funkce f je definována na $\mathbb{R}^2$. V bodech, kde $y^2 \neq x^2$, můžeme počítat derivaci „podle vzorečků“:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \operatorname{sgn}(x^2 - y^2) \cdot 2x,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\operatorname{sgn}(x^2 - y^2) \cdot 2y.$$

V bodech, kde $y^2 = x^2$, zkusme počítat parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x}$ podle definice

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t, y) - f(x, y)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{|(x + t)^2 - y^2|}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{|2xt + t^2|}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{|t|}{t}|2x + t|.\end{aligned}$$

Poslední limita existuje, jen když $x = 0$, a je rovna nule. Vzhledem k symetrii funkce f $(f(x, y) = f(y, x))$ totéž platí pro $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Parciální derivace funkce f jsou v bodě $[1, 2]$ spojité. Proto v bodě $[1, 2]$ existuje totální diferenciál, a tedy i tečná rovina, která má tvar

$$z = 3 - 2 \cdot (x - 1) + 4 \cdot (y - 2).$$

Příklad C: Funkce f je definována na množině $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x > 0,\ y > 0\} \cup \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x < 0,\ y < 0\}$. V bodech $[x,y] \in \mathcal{D}(f)$, kde $x \neq y$, můžeme počítat derivaci „podle vzorečků“:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{3}\left(\log\frac{x}{y}\right)^{-2/3} \cdot \frac{1}{x},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{1}{3}\left(\log\frac{x}{y}\right)^{-2/3} \cdot \frac{1}{y}$$

V bodech z definičního oboru, kde $y = x$, zkusme počítat parciální derivace podle definice

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) = \lim_{t\to 0}\frac{f(x+t,x) - f(x,x)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{\log\left(\frac{x+t}{x}\right)}}{t}$$
$$= \lim_{t\to 0}\sqrt[3]{\frac{\log\left(1+\frac{t}{x}\right)}{\frac{t}{x}} \cdot \frac{\frac{t}{x}}{t^3}} = \begin{cases} +\infty & \text{pro } x > 0, \\ -\infty & \text{pro } x < 0; \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(y,y) = \lim_{t\to 0}\frac{f(y,y+t) - f(y,y)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{\log\left(\frac{y}{y+t}\right)}}{t}$$
$$= \lim_{t\to 0} -\sqrt[3]{\frac{\log\left(1+\frac{t}{y}\right)}{\frac{t}{y}} \cdot \frac{\frac{t}{y}}{t^3}} = \begin{cases} -\infty & \text{pro } y > 0, \\ +\infty & \text{pro } y < 0. \end{cases}$$

Parciální derivace funkce f jsou v bodě $[1,2]$ spojité. Proto v bodě $[1,2]$ existuje totální diferenciál, a tedy i tečná rovina, která má tvar

$$z = -\sqrt[3]{\log 2} + \frac{1}{3}\frac{1}{(\log 2)^{\frac{2}{3}}} \cdot (x-1) - \frac{1}{6}\frac{1}{(\log 2)^{\frac{2}{3}}} \cdot (y-2).$$

Příklad D: Funkce f je definována na $\mathbb{R}^2$. V bodech $[x,y]$, kde $xy \neq 0$, můžeme počítat derivaci „podle vzorečků":

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= e^{x^2-y}\cdot 2x + \operatorname{sgn}(xy)\cdot y,\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= -e^{x^2-y} + 7 + \operatorname{sgn}(xy)\cdot x.\end{aligned}$$

Zbývá vyšetřit parciální derivace v bodech, kde $xy = 0$. Z věty o aritmetice limit plyne, že funkce f má parciální derivaci podle x (resp. podle y) v bodě $[x,y]$ právě tehdy, když ji tam má funkce $g : [x,y] \to |xy|$ (je totiž $f - g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$). Počítejme derivace funkce g v bodech $[x,0]$, $x \in \mathbb{R}$, a $[0,y]$, $y \in \mathbb{R}$, podle definice:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(x,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{g(x+t,0)-g(x,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0}{t} = 0,\\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{g(x,t)-g(x,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{|xt|}{t} = \lim_{t\to 0}|x|\operatorname{sgn} t.\end{aligned}$$

Poslední limita existuje, právě když $x = 0$, a v tomto případě je nulová.

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial y}(0,y) &= \lim_{t\to 0}\frac{g(0,y+t)-g(0,y)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0}{t} = 0,\\ \frac{\partial g}{\partial x}(0,y) &= \lim_{t\to 0}\frac{g(t,y)-g(0,y)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{|ty|}{t} = \lim_{t\to 0}|y|\operatorname{sgn} t.\end{aligned}$$

Poslední limita existuje, právě když $y = 0$, a v tomto případě je nulová.

Z výše uvedeného vyplývá, že

$$\begin{aligned}\mathcal{D}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) &= \mathbb{R}^2 \setminus \{[0,y];\ y\in\mathbb{R},\ y\neq 0\},\\ \mathcal{D}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) &= \mathbb{R}^2 \setminus \{[x,0];\ x\in\mathbb{R},\ x\neq 0\}.\end{aligned}$$

Parciální derivace funkce f jsou v bodě $[1,2]$ spojité. Proto v bodě $[1,2]$ existuje totální diferenciál, a tedy i tečná rovina, která má tvar

$$z = 1/e + 16 + (2/e+2)\cdot(x-1) + (8-1/e)\cdot(y-2).$$

Příklad E: Funkce f je definována na $\mathbb{R}^2$. Pro funkci f platí:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & \text{pro } x^2+y^2 \le 1; \\ 2-x^2-y^2 & \text{pro } x^2+y^2 > 1. \end{cases}$$

V bodech $[x,y]$, kde $x^2+y^2 \neq 1$, můžeme počítat derivaci „podle vzorečků“:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x & \text{pro } x^2+y^2 < 1; \\ -2x & \text{pro } x^2+y^2 > 1; \end{cases}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 2y & \text{pro } x^2+y^2 < 1; \\ -2y & \text{pro } x^2+y^2 > 1; \end{cases}.$$

Zbývá vyšetřit parciální derivace v bodech, kde $x^2+y^2=1$. Uvažujme bod $[x_0,y_0]$ takový, že $x_0^2+y_0^2=1$. Počítejme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\min\{(x_0+t)^2+y_0^2, 2-(x_0+t)^2-y_0^2\}-1}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\min\{1+2x_0t+t^2, 1-2x_0t-t^2\}-1}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\min\{2x_0t+t^2, -2x_0t-t^2\}}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} -|2x_0t+t^2|/t = \begin{cases} 0 & \text{pro } x_0 = 0 \\ \text{neexistuje} & \text{pro } x_0 \neq 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Vzhledem k symetrii funkce f lze parciální derivaci podle y počítat analogicky.

Z výše uvedeného vyplývá, že

$$\mathcal{D}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \mathbb{R}^2 \setminus \{[x,y];\ x^2+y^2=1,\ x\neq 0\},$$
$$\mathcal{D}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \mathbb{R}^2 \setminus \{[x,y];\ x^2+y^2=1,\ y\neq 0\}.$$

Parciální derivace funkce f jsou v bodě $[1,2]$ spojité. Proto v bodě $[1,2]$ existuje totální diferenciál, a tedy i tečná rovina, která má tvar

$$z = -3 - 2\cdot(x-1) - 4\cdot(y-2).$$

Příklad F: Funkce f je definována na $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$. Pro funkci f platí:

$$f(x,y)=\exp(y^x\log x).$$

V bodech $[x,y]\in\mathcal{D}(f)$ můžeme počítat derivaci „podle vzorečků“:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\exp(y^x\log x)\cdot\left(y^x\cdot\log y\cdot\log x+y^x\cdot\frac{1}{x}\right),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\exp(y^x\log x)\cdot\left(xy^{x-1}\cdot\log x\right).$$

Parciální derivace funkce f jsou v bodě $[1,2]$ spojité. Proto v bodě $[1,2]$ existuje totální diferenciál, a tedy i tečná rovina, která má tvar

$$z=1+2\cdot(x-1)+0\cdot(y-2).$$

Příklad G: Funkce f je definována na $\mathbb{R}^2$. V bodech $[x,y]\neq[0,0]$ můžeme počítat derivaci „podle vzorečků“:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=4(\operatorname{arctg}(\sqrt{x^2+y^2}))^3\cdot\frac{x}{1+x^2+y^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=4(\operatorname{arctg}(\sqrt{x^2+y^2}))^3\cdot\frac{y}{1+x^2+y^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

V bodě $[0,0]$ spočítáme parciální derivace z definice:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{(\operatorname{arctg}(\sqrt{t^2}))^4}{t}=\lim_{t\to0}\left(\frac{\operatorname{arctg}(|t|)}{|t|}\right)^4\cdot\frac{|t|^4}{t}=0.$$

Vzhledem k symetrii funkce f platí také $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

Parciální derivace funkce f jsou v bodě $[1,2]$ spojité. Proto v bodě $[1,2]$ existuje totální diferenciál, a tedy i tečná rovina, která má tvar

$$z=(\operatorname{arctg}\sqrt{5})^4+\frac{2}{3}(\operatorname{arctg}\sqrt{5})^3\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot(x-1)+\frac{4}{3}(\operatorname{arctg}\sqrt{5})^3\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot(y-2).$$

Příklad H: Okamžitě vidíme, že $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$. Pokud $x \neq 0$ lze v bodě $[x, y]$ počítat parciální derivace „podle vzorečků“.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \cos(x\cos y)\cdot\cos y & \text{pro } x > 0, \\ -\sin(x\sin y)\cdot\sin y & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \cos(x\cos y)\cdot(-x\sin y) & \text{pro } x > 0, \\ -\sin(x\sin y)\cdot(x\cos y) & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$

V bodech tvaru $[0, y]$ budeme počítat parciální derivace „z definice“:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,y)-f(t,0)}{t-0} = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,y)}{t}$$

Tato limita ovšem neexistuje, protože limita zleva $(-\infty)$ se nerovná limitě zprava $(\cos y)$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = \lim_{t\to y}\frac{f(0,t)-f(0,y)}{t-y} = \lim_{t\to y}\frac{0}{t-y} = 0.$$

V bodě $[1, 2]$ jsou obě parciální derivace spojité, a proto v tomto bodě existuje totální diferenciál, a tedy i tečná rovina. Její rovnice vypadá takto:

$$z = \cos(\cos 2)\cdot\cos 2\cdot(x-1) - \cos(\cos 2)\cdot\sin 2\cdot(y-2) + \sin(\cos 2).$$

Příklad I: Pro definiční obor platí: $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x+y=1\}$. Pro parciální derivace platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{xy - x - y^2}{\sqrt{x^2+y^2}(x+y-1)^2}, \qquad [x,y] \in \mathcal{D}(f)\setminus\{[0,0]\};$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{xy - x^2 - y}{\sqrt{x^2+y^2}(x+y-1)^2}, \qquad [x,y] \in \mathcal{D}(f)\setminus\{[0,0]\}.$$

V bodě $[0, 0]$ počítejme parciální derivace z definice:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t-0} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{\sqrt{t^2}}{t-1}}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{|t|}{(t-1)t} = \lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sgn} t}{t-1}.$$

Poslední limita neexistuje, protože limita zleva je rovna 1 a zprava je rovna -1. To znamená, že parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ neexistuje. Naprosto stejným postupem lze ukázat, že ani $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ neexistuje.

V bodě $[1, 2]$ jsou obě parciální derivace spojité a proto v tomto bodě existuje totální diferenciál a tedy i tečná rovina. Její rovnice vypadá takto:

$$z = \frac{-3}{4\sqrt{5}}\cdot(x-1) - \frac{1}{4\sqrt{5}}\cdot(y-2) + \frac{\sqrt{5}}{2}.$$