DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE SE SEPAROVANÝMI PROMĚNNÝMI

1. Nalezněte všechna maximální řešení rovnice $y' = \sqrt[5]{y^2}$.

2. Pro diferenciální rovnici $y' = \frac{y^2}{x^2}$ nalezněte

a) všechna maximální řešení,
b) maximální řešení procházející bodem $[1, 1/2]$,
c) všechna maximální řešení, která jsou na svém definičním oboru omezená.

3. Pro diferenciální rovnici $y' = -\frac{(1+y^2)x}{1+x^2}$ nalezněte

a) všechna maximální řešení,
b) maximální řešení procházející bodem $[0, 1]$.

4. Řešte rovnici $y'(2 - e^x) = -3e^x \operatorname{tg} y \cos^2 y$.

Nalezněte všechna maximální řešení rovnic.

5. $y' = y^2$

6. $y' = |y|$

7. $y' = \sqrt{1 - y^2}$

8. $xy' = 1 + y^2$

VÝSLEDKY

1.

$$y(x) = 0, \qquad x \in \mathbf{R};$$

$$y(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, c] \\ \sqrt[3]{\left(\frac{3}{5}(x-c)\right)^5} & x \in (c, \infty) \end{cases}, \qquad c \in \mathbf{R};$$

$$y(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{\left(\frac{3}{5}(x-c)\right)^5} & x \in (-\infty, c) \\ 0 & x \in [c, \infty) \end{cases}, \qquad c \in \mathbf{R};$$

$$y(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{\left(\frac{3}{5}(x-c_1)\right)^5} & x \in (-\infty, c_1) \\ 0 & x \in [c_1, c_2] \\ \sqrt[3]{\left(\frac{3}{5}(x-c_2)\right)^5} & x \in (c_2, \infty) \end{cases}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbf{R}, c_1 < c_2;$$

$$y(x) = \sqrt[3]{\left(\frac{3}{5}(x-c)\right)^5}, \quad x \in \mathbf{R}, \qquad c \in \mathbf{R}.$$

2. a) $y(x) = \frac{x}{1-cx}$ na intervalech $(0, 1/c)$, $(1/c, \infty)$, $(-\infty, 0)$ pro $c > 0$, na intervalech $(-\infty, 1/c)$, $(1/c, 0)$, $(0, \infty)$ pro $c < 0$; $(0, \infty)$, $(-\infty, 0)$ pro $c = 0$; $y(x) = 0$ na intervalech $(0, \infty)$, $(-\infty, 0)$.

b) $y(x) = \frac{x}{1-cx}$ na intervalu $(0, \infty)$

c) $y(x) = 0$ na intervalech $(0, \infty)$, $(-\infty, 0)$; $y(x) = \frac{x}{1-cx}$ na $(-\infty, 0)$ pro $c > 0$ a $(0, \infty)$ pro $c < 0$.

3. a) $y(x) = \operatorname{tg}(-\frac{1}{2}\log(1+x^2) + c)$ na intervalech

$\left(-\sqrt{\exp(\pi + 2c) - 1}, \sqrt{\exp(\pi + 2c) - 1}\right)$ pro $|c| < \pi/2$,
$\left(-\sqrt{\exp(\pi + 2c) - 1}, -\sqrt{\exp(-\pi + 2c) - 1}\right)$ pro $|c| \geq \pi/2$,
$\left(\sqrt{\exp(-\pi + 2c) - 1}, -\sqrt{\exp(\pi + 2c) - 1}\right)$ pro $|c| \geq \pi/2$.

b) $y(x) = \operatorname{tg}\left(-\frac{1}{2}\log(1+x^2) + \frac{\pi}{4}\right)$ na intervalu $\left(-\sqrt{\exp(\frac{3}{2}\pi) - 1}, \sqrt{\exp(\frac{3}{2}\pi) - 1}\right)$.

4. Nejde o rovnici se separovanými proměnnými. Je-li však $x \neq \log 2$, můžeme ji na tento tvar upravit:

$$y' = -\frac{3e^x}{2 - e^x} \cdot \operatorname{tg} y \cdot \cos^2 y. \tag{1}$$

Nejprve standardním postupem vyřešíme tuto rovnici.

1. krok. Funkce $h(x) = -3e^x/(2 - e^x)$ je spojitá na intervalech $(-\infty, \log 2)$ a $(\log 2, +\infty)$. Budeme tedy řešit rovnici (1) na každém z těchto intervalů.

2. krok. Nulovými body funkce $g(y) = \operatorname{tg} y \cdot \cos^2 y$ jsou body $k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Odtud dostáváme stacionární řešení

$$y(x) = k\pi, \ x \in (-\infty, \log 2), \ k \in \mathbf{Z},$$
$$y(x) = k\pi, \ x \in (\log 2, +\infty), \ k \in \mathbf{Z}.$$

3. krok. Funkce g je spojitá a nenulová na intervalech $\left(k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}\right)$ pro $k \in \mathbf{Z}$.

4. krok. Zafixujme jeden z intervalů z 1. kroku a jeden z intervalů ze 3. kroku. Je-li y řešením rovnice, pak splňuje

$$\frac{y'(x)}{\operatorname{tg} y(x) \cdot \cos^2 y(x)} = -\frac{3e^x}{2 - e^x}.$$

Primitivní funkcí k funkci $y \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{tg} y \cdot \cos^2 y}$ je například $G(y) = \log|\operatorname{tg} y|$, primitivní funkcí k pravé straně zase $H(x) = 3\log|2 - e^x|$. Je-li y řešení, pak existuje konstanta $c \in \mathbf{R}$ taková, že

$$\log|\operatorname{tg} y(x)| = 3\log|2 - e^x| + c.$$

5. krok. Zafixujme c. Všimněme si, že $G\big((k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2})\big) = \mathbf{R}$ pro libovolné $k \in \mathbf{Z}$, tedy pro x již nedostaneme žádné další omezení. Po úpravě obdržíme

$$|\operatorname{tg} y(x)| = e^c \cdot |2 - e^x|^3.$$

Rozeberme různé případy znamének. Podle toho, zda $x \in (-\infty, \log 2)$, nebo $x \in (\log 2, +\infty)$, je výraz $2-e^x$ kladný, nebo záporný. Podobně znaménko $\operatorname{tg} y$ závisí na tom, ve kterém z intervalů z 3. kroku pracujeme. Odstraníme-li tedy absolutní hodnoty, mohou se na jednotlivých stranách rovnice objevit znaménka navíc. Když si však uvědomíme, že číslo e^c je libovolná kladná konstanta, je jasné, že ve všech případech bude platit

$$\operatorname{tg} y = a \cdot (2 - e^x)^3,$$

kde a je nějaká nenulová konstanta. Funkce tg zúžená na $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$ má inverzní funkci $k\pi+\operatorname{arctg}$, a tedy funkce

$$y(x) = k\pi + \operatorname{arctg}\big(a(2-e^x)^3\big)$$

je pro každé $k \in \mathbf{Z}$ a $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ řešením rovnice (1) na intervalu $(-\infty, \log 2)$ a také na intervalu $(\log 2, +\infty)$. Všimněme si ještě, že dosadíme-li $a = 0$, dostaneme stacionární řešení z 2. kroku.

6. krok. Řešení rovnice (1) mezi sebou nelze lepit, jsou totiž definovaná na maximálních možných intervalech. Proto jsou v 5. kroku popsána všechna maximální řešení rovnice (1).

My jsme však měli najít řešení původně zadané rovnice. Na intervalech neobsahujících bod $\log 2$ je tato rovnice ekvivalentní s (1). Bod $\log 2$ jsme vyloučili jen proto, abychom mohli řešit rovnici (1), na niž bylo možné použít standardní postup. Proto je třeba ověřit, zda je řešení rovnice (1) možno slepit v bodě $\log 2$. Uvědomte si, že jde o slepování z jiného důvodu než v 6. kroku řešení rovnice se separovanými proměnnými, a tudíž musíme ověřit nejen shodnost limit řešení, ale i existenci derivace a platnost naší rovnice v bodě $\log 2$.

Snadno zjistíme, že limita řešení z 5. kroku v bodě $\log 2$ zprava eventuálně zleva je $k\pi$, a limita y' je zde 0. Definujeme-li tedy

$$y(x) = \begin{cases} k\pi + \operatorname{arctg}\big(a(2-e^x)^3\big) & \text{pro } x \in (-\infty, \log 2\rangle, \\ k\pi + \operatorname{arctg}\big(b(2-e^x)^3\big) & \text{pro } x \in (\log 2, +\infty), \end{cases} \qquad a, b \in \mathbf{R}, k \in \mathbf{Z},$$

pak tato funkce je spojitá na $\mathbf{R}$ a podle věty o výpočtu derivace platí $y'(\log 2) = 0$. Dosazením ověříme, že naše rovnice je splněna i v bodě $\log 2$. Všechna maximální řešení mají tedy uvedený tvar. Některá jsou znázorněna na obrázku.