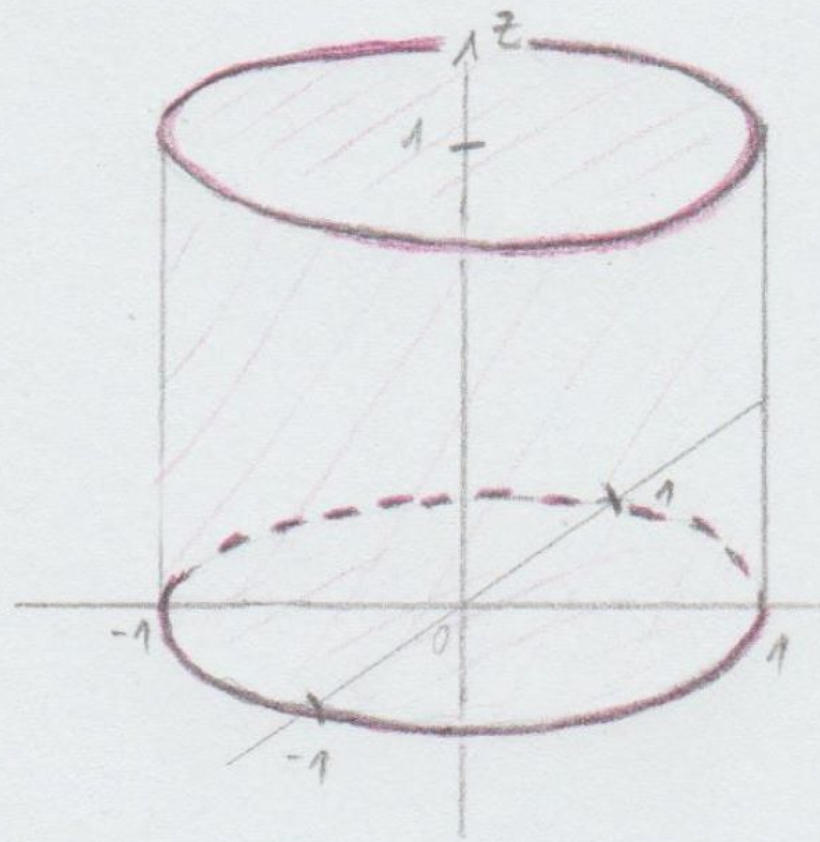
9. cvičení z MA4 – Křivkový a plošný integrál – Gaussova věta a Greenova věta

1) Příklad 3.43

Spočtěte tok vektorového pole $f(x,y,z)=(xz,\,xy,\,z)$ skrz $H(\Omega)$, kde $\Omega=\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3,\ x^2+y^2<1,\ 0<z<1\}$. Použijte Gaussovu větu i area formuli.



průnik vzorů otevřených

Řešení $n=3,\ k=2=n-1$, Ω je omezená otevřená neprázdná

Označme $\Omega^+=\{(x,y,1): x^2+y^2<1\}$, $h_1(x,y,z)=z-1$, $\nu_\Omega^1=(0,0,1)$

$\Omega^-=\{(x,y,0): x^2+y^2<1\}$, $h_2(x,y,z)=-z$, $\nu_\Omega^2=(0,0,-1)$

$S=\{(x,y,z)\ \ x^2+y^2=1,\ 0<z<1\}$, $h_3(x,y,z)=x^2+y^2-1$,

$$\nu_\Omega^3=\frac{(2x,2y,0)}{\sqrt{4x^2+4y^2}}=(x,y,0)$$

$C^+=\{(x,y,1): x^2+y^2=1\}$

$C^-=\{(x,y,0): x^2+y^2=1\}$

Pak $H(\Omega)=\Omega^+\cup\Omega^-\cup S\cup C^+\cup C^-$ a $H_*(\Omega)\supset\Omega^+\cup\Omega^-\cup S$, neboť zde pro každý bod máme příslušnou rozhraničující funkci (h_1,h_2,h_3).

a) Pomocí Gaussovy věty

- $\mathcal{H}^2(H(\Omega)\setminus H_*(\Omega))=0$, neboť $H(\Omega)\setminus H_*(\Omega)\subset C^+\cup C^-$, $\mathcal{H}^1(\text{kružnice})<\infty$, tedy $\mathcal{H}^2(\text{kružnice})=0$, a tedy $\mathcal{H}^2(C^+\cup C^-)=\mathcal{H}^2(C^+)+\mathcal{H}^2(C^-)=0+0=0$.
- $\mathcal{H}^2(H(\Omega))<\infty$, neboť $\mathcal{H}^2(H(\Omega))=\mathcal{H}^2(\Omega^+)+\mathcal{H}^2(\Omega^-)+\mathcal{H}^2(S)+\mathcal{H}^2(C^+)+\mathcal{H}^2(C^-)$
  ↳ $\mathcal{H}^2$ je aditivní na borelovsky měřitelných množinách.
  $=\pi+\pi+2\pi+0+0=4\pi.$
- $f\in C^1(\mathbb{R}^3)$, $\operatorname{div} f=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial z}=z+x+1$

Ověřili jsme předpoklady Gaussovy věty, tedy

$$\int_{H(\Omega)}\langle f,\nu_\Omega\rangle\,d\mathcal{H}^2=\int_\Omega \operatorname{div} f\,d\lambda^3=\int_{\Omega=\{x^2+y^2<1,\,0<z<1\}} z+x+1\,dx\,dy\,dz=$$

(Případně použijte válcové souřadnice)

$$=\pi\cdot\int_0^1 z\,dz+1\cdot\underbrace{\int_{x^2+y^2<1} x\,dx\,dy}_{\text{symetrie v } x}+\pi=\frac{\pi}{2}+0+\pi=\frac{3}{2}\pi.$$

b) Přes area formuli

$$\int_{H(\Omega)}\langle f,\nu_\Omega\rangle\,d\mathcal{H}^2=\int_{\Omega^+}\langle f,\nu_\Omega^1\rangle\,d\mathcal{H}^2+\int_{\Omega^-}\langle f,\nu_\Omega^2\rangle\,d\mathcal{H}^2+\int_S\langle f,\nu_\Omega^3\rangle\,d\mathcal{H}^2+\overbrace{\int_{C^-}\langle\rangle}^{=0}+\overbrace{\int_{C^+}\langle\rangle}^{=0}=$$

$$=\int_{\Omega^+} z\,d\mathcal{H}^2+\int_{\Omega^-}-z\,d\mathcal{H}^2+\int_S x^2z+xy^2\,d\mathcal{H}^2+0+0=\pi+0+\frac{\pi}{2}=\frac{3}{2}\pi.$$

$$\int_{\Omega^+} z\,d\mathcal{H}^2=\left[\begin{array}{l}\varphi(r,\alpha)=\begin{pmatrix}r\cos\alpha\\ r\sin\alpha\\ 1\end{pmatrix}\\ G=(0,1)\times(-\pi,\pi)\\ \operatorname{vol}\varphi'=r,\ \text{prosté, regul.}\end{array}\right]\overset{\text{AF.}}{=}\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot r\,d\alpha\,dr+\mathcal{H}^2\left(\{(t,0,1),\ t\in(-1,0]\}\right)=\pi$$

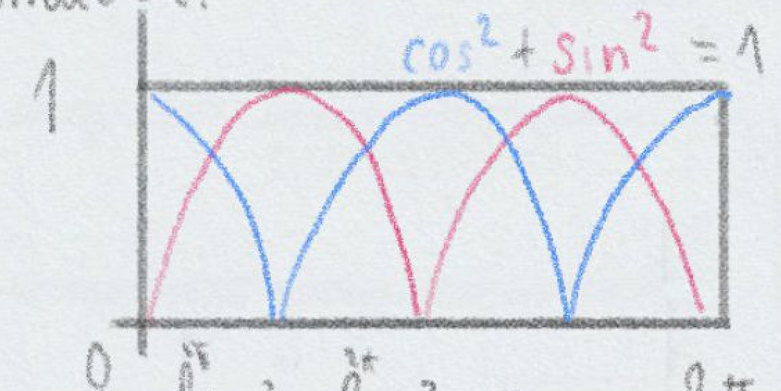
↳ $=0$, neboť $\mathcal{H}^1(\text{úsečka})<\infty$

$$\int_{\Omega^-} -z \, d\mathcal{H}^2 = \left[\begin{array}{l} \varphi(r,\alpha) = \begin{pmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \\ G = (0,1)\times(-\pi,\pi) \\ \mathrm{vol}\,\varphi' = r, \text{ prostá, regul.} \end{array}\right] = \int_0^1\int_{-\pi}^{\pi} 0 \, d\alpha \, dr + \mathcal{H}^2(\{(t,0,0),\ t\in(-1,0]\}) = 0$$

↳ $= 0$, neboť $\mathcal{H}^1(\text{úsečka}) < \infty$

$$\int_S x^2 z + xy^2 \, d\mathcal{H}^2 = \left[\begin{array}{l} \varphi(\alpha,z) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ z \end{pmatrix}, \ \varphi'(\alpha,z) = \begin{pmatrix} -\sin\alpha & 0 \\ \cos\alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ G = (-\pi,\pi)\times(0,1), \quad \mathrm{vol}\,\varphi'(\alpha,z) = 1, \text{ prostá a regulární} \end{array}\right] \overset{4F}{=} \int_0^1\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2\alpha\, z + \cos\alpha \sin^2\alpha \, d\alpha \, dz \, +$$

Pomůcka:



$\int_0^{2\pi} \cos^2 = \int_0^{2\pi} \sin^2 = \pi$

$$+ \underbrace{\mathcal{H}^2(\{(-1,0,z),\ z\in(0,1)\})}_{=0} = \frac{1}{2}\cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2\alpha \, d\alpha + 1\cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos\alpha \cdot \sin^2\alpha \, d\alpha = \frac{1}{2}\pi + 0.$$

Příklad na procvičení (sepsaná řešení vítána)

Spočtěte tok vektorového pole $f(x,y,z) = (x,y,z)$ hranicí $H(\Omega)$ množiny $\Omega = \{[x,y,z],\ x^2+y^2 < z < 1\}$. Zkuste obě možnosti řešení.

Dále příklady 3.45 – 3.51, případně 3.52, 3.54,
$\cup \{3.43\}$

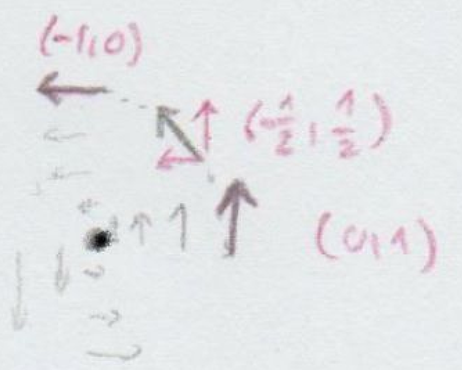
Greenova věta

Teoretický podklad:

- $c : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ je po částech regulární křivka, jestliže $\exists$ dělení $\{t_i\}_{i=0}^{p}$ intervalu $[a,b]$ tak, že
  - c je třídy C^1 na $[t_{j-1}, t_j]$, $j = 1,\dots,p$
  - $\forall t \in [a,b] \setminus \{t_0,\dots,t_p\}$: $c'(t) \neq 0$

  c je jednoduchá a uzavřená, pokud $c|_{[a,b)}$ je prostá a $c(a) = c(b)$
- Jordan: Nechť $c : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ jednoduchá uzavřená. Pak $\exists$ otevřené disjunktní množiny $\mathrm{Int}\,c$ a $\mathrm{Ext}\,c$, $\mathrm{Int}\,c$ je omezená, $\mathrm{Ext}\,c$ je neomezená, $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Int}\,c \cup \mathrm{Ext}\,c \cup c[a,b]$.
  $H(\mathrm{Int}\,c) = H(\mathrm{Ext}\,c) = c[a,b]$.
  ↳ pokud je c po částech regulární, všechny body $H(\mathrm{Int}\,c)$ až na konečně mnoho $\in H_*(\mathrm{Int}\,c)$.
- rotace: $U \subset \mathbb{R}^2$ otevřená, $f : U \to \mathbb{R}^2$, $f \in C^1(U)$, $x \in U$.

$$\mathrm{curl}\, f(x) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x).$$

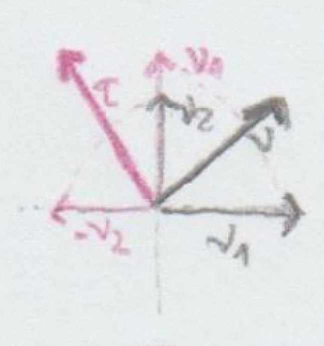


$\left.\begin{array}{l} f_2 \text{ roste s } x \\ f_1 \text{ klesá s } y \end{array}\right\}$ curl > 0

- Greenova věta
  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ omezená otevřená neprázdná
  $\mathcal{H}^1(H(\Omega)) < \infty$, $\mathcal{H}^1(H(\Omega) \setminus H_*(\Omega)) = 0$
  f vektorové pole $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f \in C^1$ na otevřené $G \supset \overline{\Omega}$
  Pro $x \in H_*(\Omega)$ položme $\tau_\Omega(y) = -(\nu_\Omega(y) \times)$.
  Pak

$$\int_{H(\Omega)} \langle f(y), \tau_\Omega(y) \rangle \, d\mathcal{H}^1(y) = \int_\Omega \mathrm{curl}\, f(x) \, d\lambda^2(x).$$

$$-\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \times = -\begin{pmatrix} \nu_2 \\ -\nu_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nu_2 \\ \nu_1 \end{pmatrix}$$



„otočení o $\frac{\pi}{2}$ v kladném smyslu"

- křivkový integrál: ať $c:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ po částech regulární

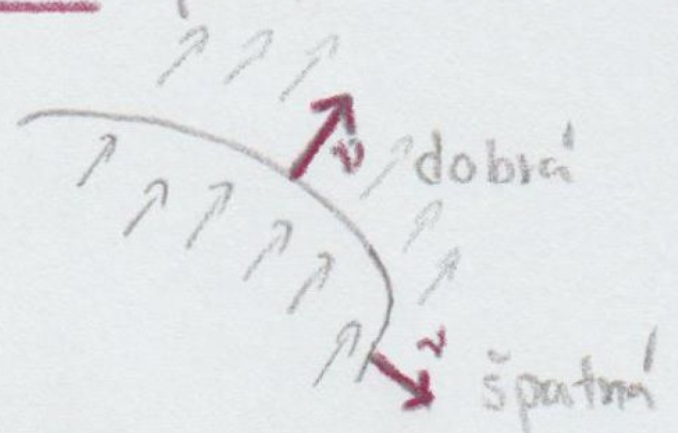
1. druh $\int_c g\,ds = \int_a^b g(c(t))\cdot \|c'(t)\|\,dt$, $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ — pouze naintegrování hodnot přes množinu, area formule

2. druh $\int_c g\cdot dc = \int_a^b \langle g(c(t)), c'(t)\rangle\,dt$, $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ — záleží na směru, nejlepší je pole ve směru křivky

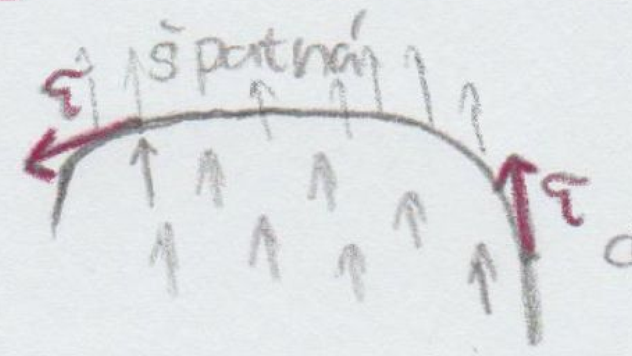
↳ odpovídá τ

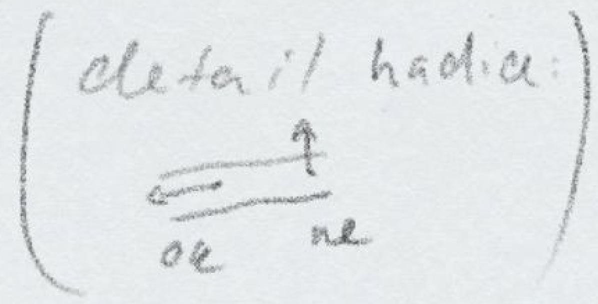
Význam skalárního součinu s ν a τ:

Gauss: "propustnost membrány"



Green: "průtočnost hadice"





- Greenova-Jordanova věta

$c:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ po částech regulární jednoduchá uzavřená

f vektorové pole $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f\in C^1$ na otevřené $G\supset\overline{\mathrm{Int}\,c}$

Pokud existuje $t\in[a,b]$, že $\det(\nu_{\mathrm{Int}c}(c(t)), c'(t))>0$, (tj. jestli máme správně orientaci, jestli $\tau_{\mathrm{Int}} = \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}$.)

pak
$$\int_c f\cdot dc = \int_{\mathrm{Int}c} \mathrm{curl}\, f\, d\lambda^2$$

Snazší ověření předpokladů díky Jordanově větě

Příklad 3.39 Vypočtěte křivkový integrál $\int_c xy^2dy - x^2y\,dx$, kde c je kladně orientovaná kružnice $x^2+y^2=a^2$, $a>0$.

zadáno křivkou, použijeme G-J

Řešení: Parametrizujeme $c(t)=(a\cos t, a\sin t)$, $t\in[-\pi,\pi]$

$c'(t) = (-a\sin t, a\cos t)$, $c'(t)\neq 0\ \forall t\in[-\pi,\pi]$, $c\in C^1[-\pi,\pi]$

$\Rightarrow c$ je (po částech) regulární jednoduchá uzavřená

$f(x,y) = (-x^2y, xy^2)$, $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$. $\mathrm{curl} f(x,y) = \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} = y^2-(-x^2) = x^2+y^2$

$\nu_{\mathrm{Int}c}$: $H(\mathrm{Int}c) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=a^2\}$

$\mathrm{Int}c = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<a^2\}$, rozhraničující funkce: $h(x,y)=x^2+y^2-a^2$

$$\nu_{\mathrm{Int}c} = \frac{\nabla h}{\|\nabla h\|} = \frac{(2x,2y)}{\sqrt{4x^2+4y^2}} = \frac{(x,y)}{a}$$

(ověřujeme, zda naše parametrizace odpovídá zadání a tomu, co umí G-J věta.)

Ověříme $\det>0$: (případně vyrobíme $\tau_{\mathrm{Int}c}$ a použijeme Greenovu větu)

$$\det(\nu_{\mathrm{Int}c}(c(t)), c'(t)) = \det\begin{pmatrix} \frac{1}{a}\cdot a\cos t & -a\sin t \\ \frac{1}{a}\cdot a\sin t & a\cos t\end{pmatrix} = a\cos^2 t + a\sin^2 t = a>0.$$

Ověřili jsme předpoklady Greenovy-Jordanovy věty, tedy

$$\int_c xy^2dy - x^2y\,dx = \int_{\mathrm{Int}c}\mathrm{curl} f\,d\lambda^2 = \int_{x^2+y^2<a^2} x^2+y^2\,d\lambda^2 = \left[\begin{array}{l}\varphi(r,\alpha)=\begin{pmatrix} r\cos\alpha\\ r\sin\alpha\end{pmatrix}\\ G=(0,1)\times(-\pi,\pi),\ \mathrm{vol}\,\varphi'=r\end{array}\right] =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^a r^2\cdot r\,dr\,d\alpha + \underbrace{\lambda^2(\{(t,0), t\in(-1,0]\})}_{=0,\ \mathcal{H}^1(-1,-)<\infty} = 2\pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a = \frac{a^4\pi}{2}.$$

pro kontrolu z definice křivkového integrálu

$$\int_C xy^2dy - x^2y\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \langle f(c(t)), c'(t)\rangle dt = 2\int_{-\pi}^{\pi} a^4 \sin^2 t \cos^2 t\, dt \overset{\text{cvičení}}{=} 2a^4 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{a^4\pi}{2}$$

$$\langle f(c(t)), c'(t)\rangle = \langle(-a^2\cos^2 t\, a\sin t, a\cos t \cdot a^2\sin^2 t); (-a\sin t, a\cos t)\rangle =$$
$$= a^2\cos^2 t\, a^2\sin^2 t + a^4\cos^2 t \sin^2 t = 2a^4\sin^2 t\cos^2 t$$

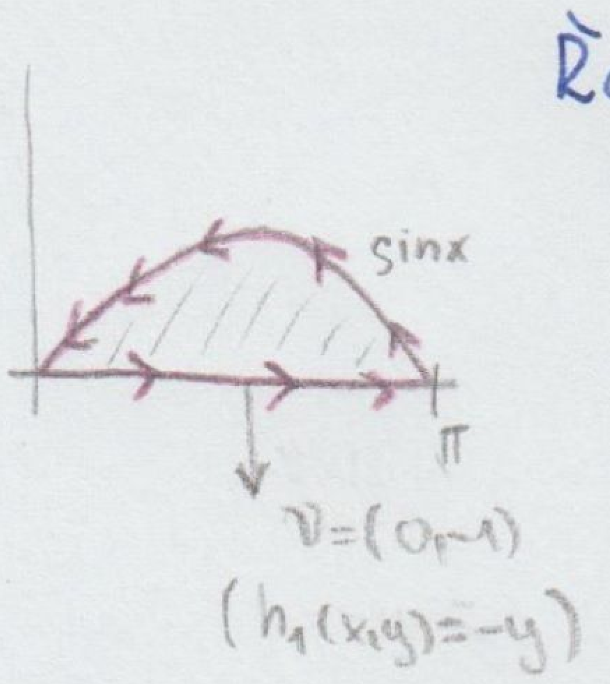
Pozorování: parametrizace se musí provést tak i tak, Greenova a Green-Jordanova věta vedly na snazší, avšak víc rozměrné integrály

Pozorování 2: $\nu_{Int\,C} = \frac{(x,y)}{a}$

$\tau_{Int} = -\nu_{Int\,C}\, x = \frac{(-y,x)}{a} = \frac{(-a\sin t, a\cos t)}{a} = \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}$

Konec cvičení. Následující příklad bude pravděpodobně součástí přednášky.

Příklad 3.41 Spočtěte křivkový integrál $\int_C e^x(1-\cos y)dx - e^x(y-\sin y)dy$, kde c je křivka s kladnou orientací, která vymezuje množinu $0<x<\pi$, $0<y<\sin x$



Řešení: • $c(t) = \begin{cases} (t,0) \ldots t\in(0,\pi) \\ (2\pi - t, -\sin t) \ldots t\in[\pi, 2\pi] \end{cases}$ $\quad c'(t) = \begin{cases} (1,0) \ldots t\in(0,\pi) \\ (-1, -\cos t) \ldots t\in(\pi,2\pi) \end{cases}$

c je po částech regulární, jednoduchá, uzavřená

• $\det(\nu_{Int}(c(\tfrac{\pi}{2})), c'(\tfrac{\pi}{2})) = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 1 > 0$, tedy $\exists t: \det > 0$

• $f(x,y) = (e^x(1-\cos y), -e^x(y-\sin y)) \in C^1(\mathbb{R}^2)$

$\operatorname{curl} f = \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} = -e^x(y-\sin y) + e^x \sin y = -ye^x$

Ověřili jsme předpoklady Greenovy-Jordanovy věty, tedy

$$\int_C e^x(1-\cos y)dx - e^x(y-\sin y)dy = \int_{\substack{0<x<\pi \\ 0<y<\sin x}} -ye^x\, d\lambda^2 \overset{\text{FUB}}{=} \int_0^\pi \int_0^{\sin x} -ye^x\, dy\, dx = \int_0^\pi e^x\left[-\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sin x} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi -e^x \sin^2 x\, dx = -\frac{1}{2}\int_0^\pi e^x \frac{1-\cos 2x}{2} dx \underset{\substack{\text{cvičení} \\ \text{per partes}}}{=} -\frac{1}{5}(e^\pi - 1)$$

Příklady na Greena: 3.39 - 3.44 \ {3.43}

Příště: příklady typu 3.44

Stokesova věta