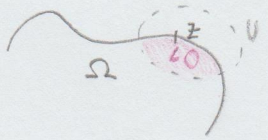
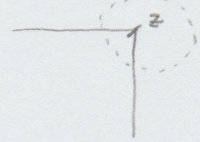
8. cvičení z MA4 – Křivkový a plošný integrál – – Tok vektorového pole, Gaussova věta

Teoretický podklad: $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $z \in H(\Omega)$ (hranice), U okolí z

- rozhraničující funkce: $h: U \to \mathbb{R}$, $h \in C^1(U)$, $\nabla h(z) \neq o$, $U \cap \Omega = \{x \in U;\, h(x) < 0\}$.



(pro takové z rozhraničující funkce neexistuje (není C^1 pro žádné okolí U)

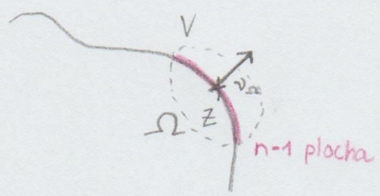


$\Rightarrow z \notin H_*(\Omega)$)

- regulární bod: z je prvkem $H_*(\Omega)$, jestliže $\exists$ U okolí z a $h: U \to \mathbb{R}$ rozhraničující.
  - Věta 20.15 říká, že $\exists V \subset U$ okolí z tak, že $H(\Omega) \cap V$ je $n-1$ plocha

- jednotkový normálový vektor:
  - je-li z regulární bod $H(\Omega)$, pak $\nu \in T_z(H(\Omega) \cap V)^{\perp}$ délky 1 je jednotkový normálový vektor
  - máme-li parametrizaci $\varphi: G \to \mathbb{R}^n$ regulární homeomorfismus, kde $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ otevřená, $a \in G$, $\varphi(a) = z$, pak

$$\nu(z) = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(a) \times \ldots \times \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}}(a)}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(a) \times \ldots \times \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}}(a) \right\|}.$$



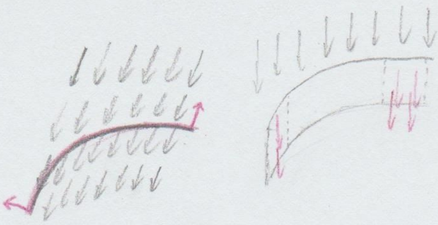
  - máme-li $h: U \to \mathbb{R}$ rozhraničující funkci, pak

$$\nu(z) = \frac{\nabla h(z)}{\| \nabla h(z) \|},$$

tento vektor má navíc orientaci "ven", nazýváme ho vnějším jednotkovým normálovým vektorem a značíme ν_Ω.

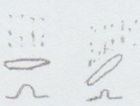
- tok vektorového pole: $f: M \to \mathbb{R}^n$ vektorové pole, kde $M \subset \mathbb{R}^n$ je $(n-1)$ plocha orientovaná normálovým polem ν. Tok vektorového pole f plochou (M, ν) je

$$\int_M \langle f(y), \nu(y) \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}(y)$$



pokud integrál konverguje.

Představa: dětské sítko na pískovišti

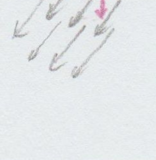


kolik světla projde různě nakloněným sklem

Poznámka: tok vektorového pole vyrábí z integrálu 2. druhu integrál 1. druhu

- divergence vektorového pole: $f: U \to \mathbb{R}^n$ třídy C^1, U otevřená $\subset \mathbb{R}^n$, $x \in U$

$$\operatorname{div} f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x)$$



jak to vyvěrá, jak to zrychluje

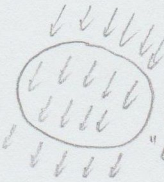
• Gaussova věta o divergenci:

$n \in \mathbb{N}, n>1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ omezená otevřená neprázdná

$\mathcal{H}^{n-1}(H(\Omega)) < \infty$, $\mathcal{H}^{n-1}(H(\Omega) \setminus H_*(\Omega)) = 0$

f vektorové pole $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f \in C^1$ na otevřené $W \supset \overline{\Omega}$

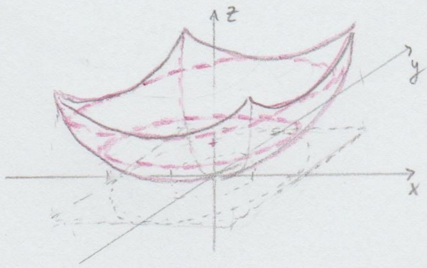
Pak $\displaystyle\int_{H(\Omega)} \langle f(y), \nu_\Omega(y) \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1} = \int_\Omega \operatorname{div} f(x) \, d\lambda^n(x).$



Příklady

1. příklad (3.52) Spočtěte tok vektorového pole $F(x,y,z) = (z, 0, x^2)$ ve směru osy z parabolickou plochou

$$M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z, \ x,y \in [-1,1]\}$$



Řešení

- zajímá nás pouze tok touto "nezavřenou" plochou, ne tok hranicí oblasti, nelze tedy použít Gaussovu větu.
- chceme tedy spočítat: $\int_M \langle f, \nu \rangle \, d\mathcal{H}^2$, kde nám bylo zadáno, že ν má směřovat ve směru růstu z.

1) možnost: parametrizace $G = (-1,1) \times (-1,1)$, $\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2+y^2 \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{vol} \varphi' = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} \neq 0$$

tedy φ je regulární (C^1, $\operatorname{vol} \neq 0$), homeomorfismus na $\{x^2+y^2 = z, \ x,y \in (-1,1)\}$

$$\nu = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\| \ - \| - \ \|} = \frac{1}{\operatorname{vol} \varphi'} \cdot \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix}$$

v z-tové složce je 1, tedy směřuje ve směru růstu z, jak bylo zadáno (jinak bychom vzali $-\nu$)

Tedy

$$\int_M \langle f, \nu \rangle \, d\mathcal{H}^2 = \int_{\varphi(G)} \langle f, \nu \rangle \, d\mathcal{H}^2 + \overbrace{\int_{M \setminus \varphi(G)} \langle f, \nu \rangle \, d\mathcal{H}^2}^{0, \text{ neboť } \mathcal{H}^1(M \setminus \varphi(G)) < \infty \text{ (CV: např. touto parametrizací + lipschitzovskost)}} =$$

$$\overset{AF}{=} \int_G \langle f(\varphi(x,y)), \nu(x,y) \rangle \operatorname{vol} \varphi' \, dx\,dy = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \frac{1}{\operatorname{vol} \varphi'} \big(\underbrace{-2x(x^2+y^2)}_{\text{liché v } x} + 0 + x^2 \big) \cdot \operatorname{vol} \varphi' \, dx\,dy$$

$$= 2 \cdot \int_{-1}^{1} x^2 \, dx = \frac{4}{3}$$

2) možnost: vezmème rozhraničující funkci $h(x,y,z)=-x^2-y^2+z$ $\quad \underbrace{\{x^2+y^2>z,\ x,y\in(-1,1)\}}_{=\{h<0\}}$

Pak $\nabla h(x,y,z)=\begin{pmatrix}-2x\\-2y\\1\end{pmatrix}$, je $C^1(\mathbb{R}^3)$, $\nabla h\neq 0$, $(-1,1)^2\times(-1,4)\wedge$

↳ tedy vnější normála půjde ve směru růstu z

$$\nu_\Omega(x,y,z)=\frac{(-2x,-2y,1)}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}$$

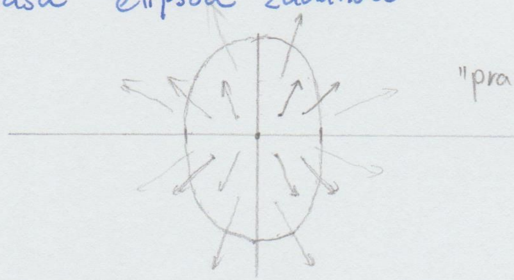
Tedy $$\int_M \langle f,\nu\rangle\, d\mathcal{H}^2=\int_{\varphi(G)}\langle f,\nu\rangle\, d\mathcal{H}^2+\int_{M\setminus\varphi(G)}\overset{=0}{\langle f,\nu\rangle}\, d\mathcal{H}^2=\int_{\varphi(G)}\frac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}\cdot(-2xz+x^2)\, d\mathcal{H}^2$$

$$\overset{AF}{=}\int_G \frac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}\left(-2x(x^2+y^2)+x^2\right)\cdot\sqrt{4x^2+4y^2+1}\, d\lambda^2=\frac{4}{3}.$$

Závěr: Výpočet normály je rychlejší z rozhraničující funkce, ale k parametrizaci bylo stejně nakonec nutno přejít kvůli A.F.

Gaussova věta nám ale dovolí area formuli obejít!

2. příklad (3.38) Kapalina proudí rychlostí $v(x,y)=(x,2y)$. Určete množství kapaliny, která proteče za jednotku času elipsou zadanou rovnicí $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$



"pramen"

Řešení: $n=2$

chceme spočítat tok pole $(x,2y)$ elipsou, tedy

$$\int_{\{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1\}}\langle v(x,y),\nu\rangle\, d\mathcal{H}^1$$

Jsou splněny předpoklady Gaussovy věty: elipsa $\overset{=\{[x,y],\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}<1\}}{}$ otevřený, omezený, neprázdný; $\mathcal{H}^{n-1}(H(\Omega))=\mathcal{H}^1(\text{elipsa})<\infty$, $\mathcal{H}^1(H(\Omega)\setminus H_*(\Omega))=\mathcal{H}^1(\emptyset)=0$ (každému bodu $H(\Omega)$ lze najít rozhraničující funkci: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-1$), $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$

Tedy $$\int_{\{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1\}}\langle v(x,y),\nu\rangle\, d\mathcal{H}^1\overset{Gauss}{=}\int_{\{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}<1\}}\operatorname{div} f\, d\lambda^2=\int_{\{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}<1\}}1+2\, d\lambda^2=3\cdot\lambda^2\left(\left\{[x,y],\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}<1\right\}\right)=$$

$$\overset{\text{cv z míry}}{=}3\cdot\pi\cdot2\cdot3=18\pi$$

3. Příklad (variace na 3.45)

Spočtěte integrál $\int_M z\,dx\,dy$, kde M je kladně orientovaná plocha $M=\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3, x^2+y^2+z^2=1\}$.

Alternativní zadání: Spočtěte tok vektorového pole f plochou M, která je orientována normálovým vektorem ν, kde $f(x,y,z)=(0,0,z)$, M jako výše, $\nu(x,y,z)=[x,y,z]$

Alternativní zadání 2: M, f, ν jako výše. Ukažte platnost Gaussovy věty

Řešení

Chceme ukázat $\int_M \langle f,\nu\rangle \, d\mathcal{H}^2 = \int_\Omega \operatorname{div} f \, d\lambda^3$, kde $\Omega=\{[x,y,z], x^2+y^2+z^2<1\}$

pravá strana

$$\operatorname{div} f = \frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial z} = 0+0+1$$

$$\int_\Omega \operatorname{div} f \, d\lambda^3 = 1\cdot\lambda^3(\Omega) \overset{\text{cvičení}}{=} 1\cdot\frac{4}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi$$

levá strana - pomocí area formule

parametrizujeme: $\varphi(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta\\ \sin\alpha\cos\beta\\ \sin\beta\end{pmatrix}$, $\varphi: G\to\mathbb{R}^3$, $G=(-\pi,\pi)\times(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

φ je regulární a prosté a $\operatorname{vol}\varphi' = \cos\beta$ (dokázáno na přednášce, základní parametrizace)

$\varphi(G)$ nepokrývá půlkružnici $\begin{pmatrix}-\cos\beta\\ 0\\ \sin\beta\end{pmatrix}$, $\beta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, $\mathcal{H}^1(\text{půlkružnice})<\infty$, tedy $\mathcal{H}^2(\;)=0$

$$\text{Tedy } \int_M \langle f,\nu\rangle \, d\mathcal{H}^2 = \int_M z^2 \, d\mathcal{H}^2 = \int_{\varphi(G)} z^2 \, d\mathcal{H}^2 + \underbrace{\int_{M\setminus\varphi(G)} z^2 \, d\mathcal{H}^2}_{0} \overset{AF}{=} \int_G \sin^2\beta \overset{\operatorname{vol}\varphi'}{\cos\beta} \, d\lambda^2 =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\beta\cos\beta \, d\beta \, d\alpha = 2\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\beta\cos\beta \, d\beta = \left[\begin{array}{l|l|l} \multicolumn{3}{l}{\sin\beta = t} \\ \multicolumn{3}{l}{\cos\beta \, d\beta = dt} \\ \beta & -\frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \\ t & -1 & 1 \end{array}\right] = 2\pi\int_{-1}^{1} t^2 \, dt = 2\pi\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{4\pi}{3}$$

- Nyní jsme splnili Alternativní zadání 2 a porovnali jsme obtížnost výpočtů
- Mimo jiné jsme jednou cestou splnili Alternativní zadání 1, pro využití Gaussovy věty by bylo třeba ověřit předpoklady: Ω neprázdná, omezená, otevřená (vzor otevřené při spojitém zobrazení), $\mathcal{H}^2(H(\Omega)) = 4\pi < \infty$, $H(\Omega)=H_*(\Omega)$ (bylo na přednášce), $f\in C^1(\mathbb{R}^3)$, poté lze použít výpočet (pravá strana)
- co znamená značení v původním zadání

$$-\det\begin{pmatrix} x & \cdots \\ z & \cdots \end{pmatrix} = dx\,dz$$

$$\langle f,\nu\rangle = \left\langle f, \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\times\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}}{\|\;-\;\|-\|} \right\rangle = \frac{1}{\|-\|}\left(\underset{0}{f_1}\cdot\underset{dy\,dz}{\det\begin{pmatrix}y \text{ souřadnice}\\ z \text{ souřadnice}\end{pmatrix}} + \underset{0}{f_2}\underset{dz\,dx}{\det\begin{pmatrix}z \text{ souřadnice}\\ x \text{ souřadnice}\end{pmatrix}} + \underset{z}{f_3}\underset{dx\,dy}{\det\begin{pmatrix}x \text{ souřadnice}\\ y \text{ souřadnice}\end{pmatrix}}\right),$$

↳ pozor na pořadí!

tedy $f=(0,0,z)$.

Zkrátka, znamená to, že je to ta souřadnice pole f, jejíž diferenciál tam není

Poznámka: další značení je pouze s jedním diferenciálem, např $\int 2x\,dx + z\,dy + 2z\,dz$

o hledání pole v zadání

to naopak značí pole $(2x, z, 2z)$

↳ křivkový integrál (neznačí tok vektorového pole)