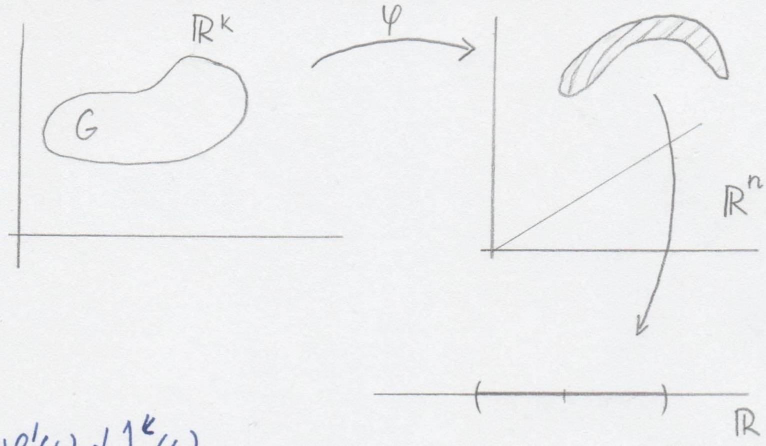
6. Cvičení z MA4 - Křivkový a plošný integrál - Area formule (1|2)



Teoretický podklad:

Věta 20.11 (Area formule)

$n, k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, $G \subset \mathbb{R}^k$ otevřená

$\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ prosté regulární

$f : \varphi(G) \to \mathbb{R}$ borelovská

Potom
$$\int_{\varphi(G)} f(x)\, d\mathcal{H}^k(x) = \int_G f(\varphi(t)) \operatorname{vol} \varphi'(t)\, d\lambda^k(t),$$

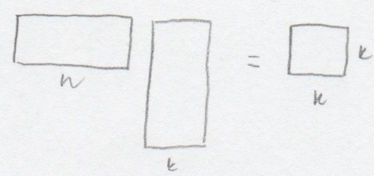
pokud integrál napravo konverguje.

$$\operatorname{vol} \varphi'(t) = \sqrt{\det(\varphi'(t)^T \varphi'(t))}.$$

Připomenutí: $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ má derivaci v a, pak $F'(a)$ je reprezentováno

maticí $$M \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_k}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_k}(a) \end{pmatrix}$$

$\varphi'(t)^T \cdot \varphi'(t)$ je tedy matice $k \times k$:



- Pomocí area formule řešíme křivkový a plošný integrál 1. druhu (jde do $\mathbb{R}$, zatím nás netrápí orientace objektů)

Příklady

1) 3.1 Nechť $a, b \in \mathbb{R}^n$. Spočtěte $\mathcal{H}^1$-míru úsečky spojující body a, b.

Víme, že λ^n míra úsečky by byla 0 a tušíme, že $\mathcal{H}^1$ míra bude klasická délka.

Řešení:

Víme $k = 1$, $n = n$. Musíme vyrobit G a φ: $G = (0,1)$, $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$
$\varphi(t) = a + t(b-a)$

Nechť M je tedy úsečka spojující a, b. Pak $M = \varphi(\overline{G})$.

Z vlastností vnější míry $\mathcal{H}^1$ máme ($\{a\}$, $\{b\}$, $\varphi(G)$ borelovské)

$$\mathcal{H}^1(M) = \mathcal{H}^1(\{a\} \cup \varphi(G) \cup \{b\}) = \mathcal{H}^1(\{a\}) + \mathcal{H}^1(\varphi(G)) + \mathcal{H}^1(\{b\}) = 0 + \mathcal{H}^1(\varphi(G)) + 0$$

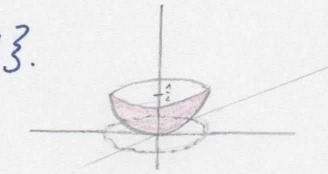
Tedy $\mathcal{H}^1(M) = \mathcal{H}^1(\varphi(G)) = \int\limits_{\varphi(G)} 1 \cdot d\mathcal{H}^1(x) \overset{A.F.}{=} \int\limits_G \operatorname{vol} \varphi'(t)\,dt$

neboť φ je prosté a C^1, $\varphi'(t) = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ \vdots \\ b_m - a_m \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ pokud $a \neq b$.

$$\operatorname{vol} \varphi'(t) = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + \ldots + (b_m - a_m)^2} = \| b - a \|$$

Tedy $\mathcal{H}^1(M) = \int\limits_0^1 \| b-a\|\, dt = \|b-a\|$.

2) 3.20 Spočtěte obsah stěny nádoby ("salátová mísa") tvaru rotačního paraboloidu $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ z = \frac{1}{2}(x^2+y^2),\ x^2+y^2 \leq 1\}$.



Řešení: $n = 3,\ k = 2$

Parametrizace: $\varphi(\alpha, r) = \begin{pmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \\ \frac{r^2}{2} \end{pmatrix}$ na $G = (-\pi,\pi) \times (0,1)$

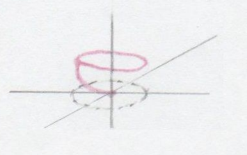
válcové souřadnice

$$\varphi'(\alpha, r) = \begin{pmatrix} -r\sin\alpha & \cos\alpha \\ r\cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & r \end{pmatrix}$$

$$(\varphi')^T \cdot \varphi' = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1+r^2 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{vol} \varphi' = r\sqrt{1+r^2} \neq 0 \Rightarrow \varphi$ je regulární, prosté

Obrazem $\varphi(G)$ je tedy "skoro" celá množina M až na horní prstenec a "zadní" oblouk.



Označme $M \setminus \varphi(G) = S$

$$\mathcal{H}^2(M) = \mathcal{H}^2(\varphi(G)) + \underbrace{\mathcal{H}^2(S)}_{\text{ukážeme, že } = 0} = \mathcal{H}^2(\varphi(G))$$

Tedy $\mathcal{H}^2(M) = \int\limits_{\varphi(G)} 1\ \mathcal{H}^2 \overset{A.F.}{=} \int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_0^1 r\sqrt{1+r^2}\,dr\,d\alpha = \pi \int\limits_0^1 \sqrt{1+r^2} \cdot 2r = \begin{bmatrix} y = 1+r^2 \\ dy = 2r\,dr \end{bmatrix} =$

r	0	1
y	1	2

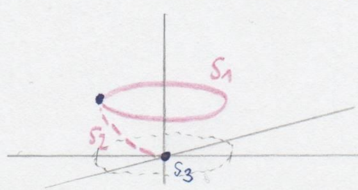
$= \pi \int\limits_1^2 y^{\frac{1}{2}}\,dy = \pi \left[\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^2 = \pi \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$

zbývá dokázat, že $\mathcal{H}^2(S) = 0$.

$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, kde $S_1 = \{[\cos\alpha, \sin\alpha, \frac{1}{2}],\ \alpha \in (-\pi,\pi)\}$

$S_2 = \{[-r, 0, \frac{r^2}{2}],\ r \in (0,1)\}$

$S_3 = \{[0,0,0], [-1, 0, \frac{1}{2}]\}$



Dle Věty 20.7 c) platí, že pokud $\mathcal{H}^1(S_1)<\infty$, pak $\mathcal{H}^2(S_1)=0$.

Opět použijeme Area formuli, nyní už je vše připraveno:

$$\psi_1(\alpha)=\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix} \quad \psi_1'(\alpha)=\begin{pmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\\ 0\end{pmatrix}, \quad \mathrm{vol}\,\psi_1'=1, \quad G_1=(-\pi,\pi)$$

$$\mathcal{H}^1(S_1)=\int_{\psi_1(G_1)} 1\, d\mathcal{H}^1 \overset{AF}{=} \int_{-\pi}^{\pi} 1\, d\alpha = 2\pi < \infty \Rightarrow \mathcal{H}^2(S_1)=0$$

Obdobně S_2: $\psi_2(r)=\begin{pmatrix}-r\\ 0\\ \frac{r^2}{2}\end{pmatrix}$, $\psi_2'(r)=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ r\end{pmatrix}$, $\mathrm{vol}^2\psi_2'=1+r^2$, $G_2=(0,1)$

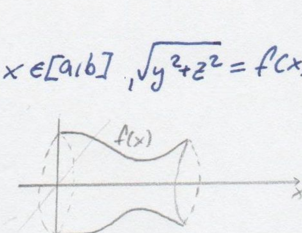
$$\mathcal{H}^1(S_2)=\int_{\psi_2(G_2)} 1\, d\mathcal{H}^1 \overset{AF}{=} \int_0^1 (1+r^2)^{\frac{1}{2}}\, dr < \infty \Rightarrow \mathcal{H}^2(S_2)=0.$$

Množina S_3 je sjednocení 2 bodů, $\mathcal{H}^1$ míra bodu je 0 z definice

$$\Rightarrow 0 \le \mathcal{H}^2(S) \le \mathcal{H}^2(S_1)+\mathcal{H}^2(S_2)+\mathcal{H}^2(S_3)=0$$

3) 3.11 Nechť $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ je kladná funkce třídy C^1 a $M=\{[x,y,z],\ x\in[a,b],\ \sqrt{y^2+z^2}=f(x)\}$

Dokažte, že $\mathcal{H}^2(M)=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$.



Jinými slovy, "vzorec pro obsah rotační plochy" (bez podstav)

Řešení: $n=3, k=2$, $G=(a,b)\times(-\pi,\pi)$, $\varphi: G\to\mathbb{R}^3$, $\varphi(t,\alpha)=\begin{pmatrix}t\\ f(t)\cos\alpha\\ f(t)\sin\alpha\end{pmatrix}$

$$\varphi'(t,\alpha)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ f'(t)\cos\alpha & -f(t)\sin\alpha\\ f'(t)\sin\alpha & f(t)\cos\alpha\end{pmatrix} \qquad \mathrm{vol}\,\varphi' = \det^{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1+(f'(t))^2 & 0\\ 0 & (f(t))^2\end{pmatrix} = f(t)\sqrt{1+(f'(t))^2}$$

φ je prosté a regulární, neboť $f\in C_1[a,b]$ kladná

Tedy $\mathcal{H}^2(\varphi(G))=\int_{\varphi(G)} 1\cdot d\mathcal{H}^2 = \int_a^b\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sqrt{1+(f'(t))^2}\,d\alpha\,dt = 2\pi\int_a^b f(t)\sqrt{1+f'(t)^2}\,dt.$

$\varphi(G)$ ale nepokrývá celou M. Nepokryté části: $M_1=\{[a, f(a)\cos\alpha, f(a)\sin\alpha], \alpha\in(-\pi,\pi]\}$

$M_2=\{[b, f(b)\cos\alpha, f(b)\sin\alpha], \alpha\in(-\pi,\pi]\}$

$M_3=\{[t, -f(t), 0], t\in(a,b)\}$

Buď můžeme ukázat nulovou $\mathcal{H}^2$ míru těchto množin jako v předchozím příkladu, nebo využijeme jinou užitečnou vlastnost: φ je C_1 a tedy lipschitzovské tedy $M_1=\{[\psi_1(\alpha), \psi_2(\alpha), \psi_3(\alpha)], \alpha\in(-\pi,\pi]\}$, ψ je lipschitzovská na $(-\pi,\pi]$ a tedy $\mathcal{H}^1(M_1)\le(\mathrm{Lip}\,\psi)^1\cdot\mathcal{H}^1((-\pi,\pi])<\infty$. (Věta 20.7(b)) Tedy $\mathcal{H}^2(M_1)=0$.

$\mathcal{H}^2(M_2)=0$ a $\mathcal{H}^2(M_3)=0$ dokážeme obdobně.

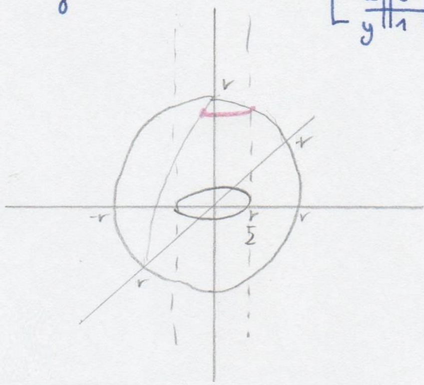
4) Spočtěte $\int_M xyz \, d\mathcal{H}^1$, kde $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2+z^2 = r^2, x^2+y^2 = \frac{r^2}{4}, x,y,z \geq 0\}$, kde $r>0$. (pevné)

Řešení $n=3, k=1$, $\varphi(\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{r}{2}\cos\alpha \\ \frac{r}{2}\sin\alpha \\ r\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$, $G = (0, \frac{\pi}{2})$, $\varphi'(\alpha) = \begin{pmatrix} -\frac{r}{2}\sin\alpha \\ \frac{r}{2}\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$, $\operatorname{vol}\varphi'(\alpha) = \frac{r}{2} \neq 0$

φ je prosté a regulární

$$\int_{\varphi(G)} xyz \, d\mathcal{H}^1 \overset{AF}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r}{2}\cos\alpha \cdot \frac{r}{2}\sin\alpha \cdot r\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{r}{2} \, d\alpha = \frac{r^4 \cdot \sqrt{3}}{16} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\alpha \sin\alpha \, d\alpha = \left[\begin{array}{c|c|c} \multicolumn{3}{l}{y = \cos\alpha} \\ \multicolumn{3}{l}{dy = -\sin\alpha} \\ \alpha & 0 & \frac{\pi}{2} \\ y & 1 & 0 \end{array} \right] =$$

$$= \frac{r^4\sqrt{3}}{16} \int_0^1 y \, dy = \frac{\sqrt{3}}{32} \cdot r^4$$



$$M = \varphi(G) \cup \underbrace{\{[\tfrac{r}{2}, 0, \tfrac{\sqrt{3}}{2}r], [0, \tfrac{r}{2}, r\tfrac{\sqrt{3}}{2}]\}}_{\mathcal{H}^1(\quad) = 0}$$

Funkce xyz je na M borelovská, tedy

$$\int_M xyz \, d\mathcal{H}^1 = \int_{\varphi(G)} xyz \, d\mathcal{H}^1 + \int_{\{[\ ],[\ ]\}} xyz \, d\mathcal{H}^1 = \int_{\varphi(G)} xyz \, d\mathcal{H}^1$$

Tedy $\int_M xyz \, d\mathcal{H}^1 = \frac{\sqrt{3}}{32} \cdot r^4$.

Obecný manuál: 1) určit n, k, zorientovat se, o jakou množinu se jedná

2) najít vhodnou parametrizaci φ, G, určit $\operatorname{vol}\varphi'$, ověřit předpoklady

3) spočítat pomocí Area formule $\int_{\varphi(G)}$

4) Ověřit, že nepokryté množiny nic nepřidají

Příklad na procvičení:

3.22 Spočtěte $\int_M z \, d\mathcal{H}^2$, kde M je helikoid zadaný parametrizací

$$M = \{[t\cos s, t\sin s, s] \in \mathbb{R}^3; t \in [0,a], s \in [0, 2\pi]\}$$