13. cvičení z MA4 - Fourierovy řady (1/3)

Teoretický podklad (reálný případ)

- trigonometrický systém $T=\{1, \cos(t), \sin(t), \cos(2t), \sin(2t), \cos(3t), \dots, \cos(kt), \sin(kt), \dots\}$, $k\in\mathbb{N}$

  - je ortogonální ve smyslu $\forall f,g\in T, f\neq g: \int_{-\pi}^{\pi} f\cdot g=0$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(kt)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(kt)\,dt=\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}1^2\,dt=2\pi$$

- trigonometrická řada: $\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos(kt)+b_k\sin(kt))$

  ↳ Otázka: kdy lze zadanou funkci f rozvinout do trigonometrické řady?

- $P_{2\pi}=\{2\pi\text{- periodické funkce na } \mathbb{R}, f\in L^1([0,2\pi])\}$

  (snadnou modifikací - viz přednášku - lze pracovat i s jinou periodou)

- Fourierovy koeficienty $f\in P_{2\pi}$

$$\boxed{a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\cos(kt)\,dt}\ ,\ k=0,1,2,\dots$$

$$\boxed{b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\sin(kt)\,dt}\ ,\ k=1,2,\dots$$

  - pro $f\in P_{2\pi}$ nezáleží na oboru integrace, je-li to interval délky 2π
  - je-li <u>f sudá</u>, pak <u>$b_k=0$</u>, $k=1,2,\dots$, a $a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(t)\cos(kt)\,dt$

    je-li <u>f lichá</u>, pak <u>$a_k=0$</u>, $k=0,1,\dots$, a $b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(t)\sin(kt)\,dt$
  - pro reálnou funkci f vyjdou a_k a b_k reálné, $k=(0),1,2,\dots$

- Fourierova řada funkce $f\in P_{2\pi}$

$$f(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos(kt)+b_k\sin(kt)),$$

  kde a_0, a_k, b_k, $k\in\mathbb{N}$, jsou Fourierovy koeficienty

  ↳ Otázky: Kdy konverguje Fourierova řada funkce f, k čemu, jak?

Jordanovo - Dirichletovo kritérium

Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi} \cap BV([0,2\pi])$. Pak $\lim\limits_{n\to\infty} s_m^f(x) = \frac{1}{2}\left(f(x+)+f(x-)\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

Je-li navíc $f \in C((a,b))$, pak $s_m^f \overset{lok}{\rightrightarrows} f$ na $(a,b) \subset \mathbb{R}$.

Další kritéria: Diniovo kritérium - má užitečné důsledky, např. pokud $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ má konečné jednostranné derivace v x, pak $s_m^f(x) \to f(x)$

Fejérovo kritérium - pro cesàrovské součty (později)

Tvrzeníčko: Je-li $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ po částech C^1, pak je $BV([a,b])$.

Důkaz: Existuje dělení $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = \pi$, že $f \in C^1([x_{i-1},x_i])$, $i=1,\ldots,m$.

Pak f je lipschitzovská na $[x_{i-1},x_i]$, $i=1,\ldots,m$, a tedy $BV([x_{i-1},x_i])$,

a tedy $BV([a,b])$. $(C^1 \subset Lip \subset AC \subset BV)$

Typy příkladů
- rozviňte f do Fourierovy řady ($\rightsquigarrow$ spočítat a_k, b_k, sestavit řadu)
- zjistěte, zda řada konverguje. Pokud ano, tak jak a kam. ($\rightsquigarrow$ kritéria)
- rozviňte f do sinové nebo cosinové řady ($\rightsquigarrow$ rozšířit sudě nebo liše, aby vypadla b_k nebo a_k)
- pomocí Fourierovy řady sečtěte číselnou řadu
- Fejérovská sčitatelnost

Příklady

9) Nalezněte cosinovou řadu tak, že její součet je roven x pro $x \in (0,\pi)$. Vyšetřete její konvergenci. Pomocí této řady sečtěte číselnou řadu $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^2}$.

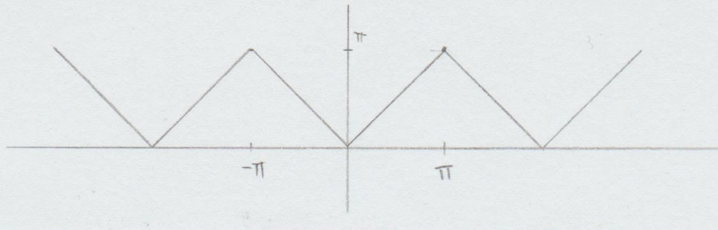
Řešení

1. krok rozšíříme na $(-\pi,\pi)$, aby byla sudá (pak vypadnou b_k a siny)

$f(x) = |x|$, $x \in (-\pi,\pi)$

2. krok rozšíříme 2π-periodicky

$f(x) = |x - 2k\pi|$, $x \in [(2k-1)\pi, (2k+1)\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$.



3. krok spočítáme Fourierovy koeficienty

f je sudá $\Rightarrow b_k = 0$, $k = 1, 2, \dots$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x \, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2} = \pi$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \underset{\downarrow \atop 1}{x} \cdot \underset{\uparrow \atop \frac{\sin(kx)}{k}}{\cos(kx)} \, dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(kx)}{k} \cdot x\right]_0^\pi - \frac{2}{k\pi}\int_0^\pi \sin(kx) =$$

$$= -\frac{2}{k\pi}\left[-\frac{\cos(kx)}{k}\right]_0^\pi = -\frac{2}{k^2\pi}\left(-\cos(k\pi) + 1\right) = \begin{cases} -\frac{4}{\pi k^2}, & k \text{ liché} \\ 0, & k \text{ sudé} \end{cases}$$

Tedy Fourierova řada f je

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \cos((2m+1)x) \quad , x \in \mathbb{R}.$$

Poznámka: v tuto chvíli ještě nevíme, zda je jejím součtem zadaná funkce.

4. krok konvergence

Funkce f je po částech C^1 a navíc spojitá na $\mathbb{R}$. Tedy je $BV([a,b])$ na libovolném $[a,b] \subset \mathbb{R}$ a dle J-D kritéria platí $S_m^f \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na (a,b). Vezměme například $[-2\pi, 2\pi]$. Pak $S_m^f \rightrightarrows f$ na $[-\pi, \pi]$ a tedy díky periodicitě $S_n^f \rightrightarrows f$ na $\mathbb{R}$.

Tedy
$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \cos((2m+1)x) \quad , x \in \mathbb{R}.$$

---

5. krok Součet číselné řady – zvolíme vhodné x (obvykle $0, \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$ apod)

Dosadíme $x = 0$. Pak

$$0 = f(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \cdot 1$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Důsledek $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Důkaz: $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}$ konverguje, označme $A = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}$.

Pak $A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{A}{4}$.

$\Rightarrow \frac{3}{4} A = \frac{\pi^2}{8} \Rightarrow A = \frac{\pi^2}{6}$.

Pozorování: Je-li f trigonometrický polynom, pak její Fourierova řada s tímto polynomem splývá.

Příklad Napište funkci $\cos^6 x$, $x \in \mathbb{R}$, ve tvaru trigonometrického polynomu

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\cos^4(x) = (\cos^2(x))^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos^2 2x = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right) =$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$$

$$\cos^6(x) = \cos^4(x)\cdot\cos^2(x) = \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}\right) =$$

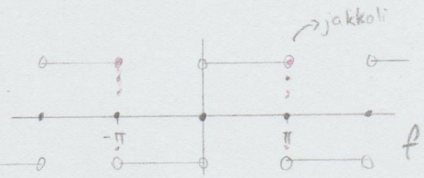
$$= \frac{3}{16} + \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{16}\cos 4x + \frac{3}{16}\cos 2x + \frac{1}{4}(\cos 2x)^2 + \frac{1}{16}\cos 2x \cos 4x$$

$$= \frac{3}{16} + \frac{7}{16}\cos 2x + \frac{1}{16}\cos 4x + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 4x\right) + \left(\frac{1}{32}(\cos 6x + \cos 2x)\right) =$$

$$= \frac{5}{16} + \frac{15}{32}\cos 2x + \frac{3}{16}\cos 4x + \frac{1}{32}\cos 6x$$

$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$

Příklad 5) Rozložte ve Fourierovu řadu funkci $\operatorname{sgn}(x)$, $x \in (-\pi, \pi)$, a určete její součet na $\mathbb{R}$.



Řešení f je lichá, rozšíříme 2π-periodicky na $\mathbb{R}$

$a_k = 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi 1\cdot \sin(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(kx)}{k}\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi k}\cdot((-1)^{k+1}+1) = \begin{cases} 0 & k \text{ sudé} \\ \frac{4}{\pi k} & k \text{ liché} \end{cases}$$

Fourierova řada pro funkci f

$$\frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin((2m+1)x)}{2m+1}$$

$f \in \overset{\text{např. z monotonii}}{BV}([0, 2\pi]) \cap P_{2\pi}$, tedy z J-D kritéria $S_n^f \to \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$

Tedy $\displaystyle \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin((2m+1)x)}{2m+1} = \tilde{f}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, kde

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 0 & x = k\pi, \\ \operatorname{sgn}(x - 2k\pi) & x \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi), \ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$