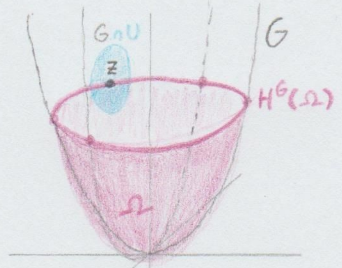
11. cvičení z MA4 – Křivkový a plošný integrál – Stokesova věta a plošný integrál 2. druhu

Teoretický podklad



- $G \subset \mathbb{R}^3$ je 2-plocha orientovaná normálovým vektorem ν
- $\Omega \subset G$ je otevřená v G, $\overline{\Omega}\setminus\Omega \subset G$
- $H^G(\Omega)$ je hranice Ω vzhledem k G
- $z \in H^G(\Omega)$ je regulární bod hranice Ω vzhledem k G, pokud

  $\exists\, U$ okolí bodu z a $h: U \to \mathbb{R}$, $h \in C^1(U)$: $\nu(z) \times \nabla h(z) \neq \vec{0}$

  $\{x \in G \cap U;\ h(x) < 0\} = \Omega \cap U$

- $H_*^G(\Omega) \subset H^G(\Omega)$ je množina všech regulárních bodů
- pro $z \in H_*^G(\Omega)$ definujeme $\tau_{\Omega,\nu}(z) = \dfrac{\nu(z) \times \nabla h(z)}{\|\nu(z) \times \nabla h(z)\|}$

  pokud $H_*^G(\Omega) \neq \emptyset$, je 1-plocha a $\tau_{\Omega,\nu}$ je její orientace

- rotace v $\mathbb{R}^3$: $f: U \to \mathbb{R}^3$, $f \in C^1(U)$.

$$\operatorname{curl} f(x) = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x),\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(x) - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(x),\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x)\right)$$

- Stokesova věta: Nechť G, ν, Ω jsou jako výše

  Ω je omezená,

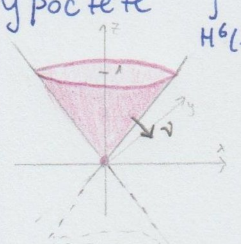
  $\mathcal{H}^1(H^G(\Omega)) < \infty$, $\mathcal{H}^1(H^G(\Omega) \setminus H_*^G(\Omega)) = 0$

  f vektorové pole $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f \in C^1$ na otevřené nadmnožině $\overline{\Omega}$

  Pak
$$\int_{H^G(\Omega)} \langle f, \tau_{\Omega,\nu} \rangle \, d\mathcal{H}^1 = \int_\Omega \langle \operatorname{curl} f, \nu \rangle \, d\mathcal{H}^2$$

Příklad

Vypočtěte $\int_{H^G(\Omega)} \langle f, \tau_{\Omega,\nu} \rangle \, d\mathcal{H}^1$, kde $f(x,y,z) = \frac{1}{2}(z^2+y^2, z^2+x^2, y^2+x^2)$



$G = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = z^2\} \setminus \{[0,0,0]\}$ 2-plocha

ν směrem ven

$\Omega = \{[x,y,z] \in G : 0 < z < 1\}$

Je dobré si to osvojit na výpočty, formálně to však řešit nebudeme.

1) Pomocí Stokesovy věty: předpoklady $G+\nu$, Ω a f

- Zde $\overline{\Omega}\setminus\Omega \not\subset G$. Nejlepší je na takovéto množiny použít zobecnění Stokesovy věty, kde body $\overline{\Omega}\setminus\Omega$, které nejsou regulární body $H^G(\Omega)$, mohou být mimo G. Pro formální využití naší Stokesovy věty je možné použít aproximace, $\underset{\varepsilon \to 0+}{\varepsilon < z < 1}$ a podobně
- $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$ a $\operatorname{curl} f = \frac{1}{2}(2y - 2z, 2z - 2x, 2x - 2y) = (y-z, z-x, x-y)$
- Ω je otevřená v G (průnik vzorů otevřených) a omezená ($\Omega \subset [-1,1]^3$)

- $\mathcal{H}^1(H^G(\Omega)) < \infty$, neboť $H^G(\Omega)$ je $\{[x,y,1], x^2+y^2=1\} (\cup \{[0,0,0]\})$ a $\mathcal{H}^1$ míra kružnice i bodu je konečná.
- $\mathcal{H}^1(H^G(\Omega) \setminus H^G_*(\Omega)) = \mathcal{H}^1(\{[0,0,0]\})$ a $\mathcal{H}^1$ míra bodu je nulová z definice $\mathcal{H}^1$ míry (resp. $(\overline{\Omega} \setminus \Omega) \setminus H^G_*(\Omega)$)

Potřebujeme ν: vnitřek G je dán rozhraničující funkcí $h^1(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$.

$$\text{pak } \nu(x,y,z) = \frac{\nabla h^1}{\|\nabla h^1\|} = \frac{2(x,y,-z)}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{(x,y,-z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad \text{směřuje ven } \checkmark$$

Pak

$$\int_{H^G(\Omega)} \langle f, \tau_{\Omega,\nu} \rangle \, d\mathcal{H}^1 = \int_\Omega \langle \operatorname{curl} f, \nu \rangle \, d\mathcal{H}^2 = \int_\Omega \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} (xy - xz + yz - yx - xz + yz) \, d\mathcal{H}^2$$

$$= \int_\Omega \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} (-2xz + 2yz) \, d\mathcal{H}^2 \overset{AF}{=} \left[\begin{array}{l} \varphi(r,\alpha) = \begin{pmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \\ r \end{pmatrix}, \quad \varphi' = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -r\sin\alpha \\ \sin\alpha & r\cos\alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \operatorname{vol}\varphi' = \sqrt{\det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}} = \sqrt{2}r \\ r \in (0,1), \ \alpha \in (-\pi,\pi), \ \varphi \text{ prosté, regulární} \end{array} \right] =$$

$$= \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2}r} (-2r^2\cos\alpha + 2r^2\sin\alpha) \sqrt{2}r \, d\alpha \, dr + \mathcal{H}^2(\text{úsečka}) = \int_0^1 -2r \int_{-\pi}^{\pi} \cos\alpha \, d\alpha \, dr + \int_0^1 2r^2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin\alpha \, d\alpha \, dr + 0 = 0 + 0 = 0$$

Alternativní způsob nalezení ν: $\frac{\partial\varphi}{\partial r} \times \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = (-r\cos\alpha, -r\sin\alpha, r) = r(-\cos\alpha, \sin\alpha, 1)$

↳ směřuje nahoru, je špatně → $\cdot(-1)$

$$\nu = \pm \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial r} \times \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}}{\left\| \frac{\partial\varphi}{\partial r} \times \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} \right\|}$$

rovnou $\frac{1}{\operatorname{vol}\varphi'} \cdot \operatorname{vol}\varphi'$

- musí se ohlídat zadaná orientace, ale odpadá problém s normováním

2) Výpočet $\int_{H^G(\Omega)} \langle f, \tau_{\Omega,\nu} \rangle \, d\mathcal{H}^1$ přímo

Potřebujeme $\tau_{\Omega,\nu}$: Uvažujme rozhraničující funkci $h^2(x,y,z) = z-1$ pro část hranice $\{[x,y,z]; x^2+y^2=1\}$. Pak $\nabla h^2(x,y,z) = (0,0,1)$ a ν máme z 1). Pak

$$\tau_{\Omega,\nu} = \frac{\nu \times \nabla h^2}{\|\nu \times \nabla h^2\|} = \frac{(y,-x,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = (y,-x,0)$$

(část hranice $\{[0,0,0]\}$ je $\mathcal{H}^1$ míry 0)

Parametrizace $c(t) = (\cos t, \sin t, 1)$, $t \in [-\pi,\pi]$

$c'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$

$\tau_{\Omega,\nu}(\cos t, \sin t, 1) = (\sin t, -\cos t, 0) = -c'(t)$ (orientace opačná, bude třeba přenásobit)

$$\int_{H^G(\Omega)} \langle f, \tau_{\Omega,\nu} \rangle \, d\mathcal{H}^1 = \int_{\{[x,y,z]; x^2+y^2=1\}} \frac{1}{2}(yz^2 + y^3 - xz^2 - x^3) \, d\mathcal{H}^1 = \left[\begin{array}{ll} c(t) & (-\pi,\pi) \\ \operatorname{vol} c' = 1 & \\ \text{prosté, regulární} & \end{array} \right] \overset{AF}{=}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin t + \sin^3(t) - \cos t - \cos^3 t) \, dt + \mathcal{H}^1(\{[-1,0,1]\}) = 0 + 0$$

Alternativní způsob výpočtu: $\int_{H^G(\Omega)} \langle f, \tau_{\Omega,\nu} \rangle \, d\mathcal{H}^1 \overset{AF}{=} -\int_{-\pi}^{\pi} \langle f(c(t)), c'(t) \rangle \, dt$ (volume a normování zmizí ale je třeba ohlídat orientaci)

Poznámky: • Stokesova věta platí pouze pro orientaci křivky $\tau_{\Omega,\nu}$, pro opačnou by se musel výraz napravo přenásobit (-1).

• Zde jsme měli zadány G, Ω a ν (tím bylo určeno τ), často však bývá zadaná pouze křivka a orientace, ostatní je třeba najít (aporovnat zadanou orientaci s τ, která je generována ν)
To nám ale dává i libovůli, jaké Ω a G si zvolíme.

Na přednášce prezentován příklad $\int_c f \cdot dc$, kde $f = (-y, x - z^2 \sin y, z^3 + 2z\cos x)$
$c = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2=1,\ x^2+z^2=1,\ z \geq 0\}$
orientace průmětu do roviny xy kladná

Plošný integrál: $k, n \in \mathbb{N},\ k \leq n,\ G \subset \mathbb{R}^k,\ \Phi: G \to \mathbb{R}^n,\ \Phi \in C^1(G)$

1\. druh $\int_\Phi g\, dS = \int_G g(\Phi(t)) \operatorname{vol} \Phi'(t)\, dt$, kde $g: \Phi(G) \to \mathbb{R}$

2\. druh

$$\int_\Phi f \cdot d\Phi = \int_G \left\langle f(\Phi(t)); \frac{\partial \Phi}{\partial t_1}(t) \times \ldots \times \frac{\partial \Phi}{\partial t_{n-1}}(t) \right\rangle dt, \text{ kde } f: \Phi(G) \to \mathbb{R}^n$$

$k = n-1$ kodimenze 1

• funguje podobně, jako křivkový integrál:

1. druh nezávisí na orientaci, je pro fukkce do $\mathbb{R}$ a jeho fyzikální význam je například hmotnost plachy při proměnlivé hustotě g
2. druh závisí na orientaci, vektorový součin odpovídá normále
   $\rightsquigarrow$ celé to odpovídá toku vektorového pole po použití area formule s parametrizací Φ (viz 8. cvičení)
   (normování normály se vydělí s volumem, pouze je třeba ohlídat orientaci)

Příklad 3.49

Spočtěte integrál $\int_M \frac{dy\,dz}{x} + \frac{dz\,dx}{y} + \frac{dx\,dy}{z}$, kde M je vnější povrch elipsoidu $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,\ a,b,c > 0\}$

Řešení: Buď jako tok vektorového pole (nelze použít Gaussovu věta o divergenci, $f \notin C^1$) nebo jako plošný integrál druhého druhu

• pole $f(x,y,z) = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right) \in C^1$ na $\mathbb{R}^3 \setminus (\{x=0\} \cup \{y=0\} \cup \{z=0\})$

• parametrizace $\Phi(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} a\cos\alpha\cos\beta \\ b\cos\alpha\sin\beta \\ c\sin\alpha \end{pmatrix}$, $G = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (-\pi, \pi)$ otevřená $\subset \mathbb{R}^2$

$$\phi'(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} -a\sin\alpha\cos\beta & -a\cos\alpha\sin\beta \\ -b\sin\alpha\sin\beta & b\cos\alpha\cos\beta \\ c\cos\alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad \phi \in C^1(G).$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\alpha}\times\frac{\partial\phi}{\partial\beta} = \left(-bc\cos^2\alpha\cos\beta, -ac\cos^2\alpha\sin\beta, -ab\sin\alpha\cos\alpha\cos^2\beta - ab\cos\alpha\sin\alpha\sin^2\beta\right) =$$

$$= \left(-bc\cos^2\alpha\cos\beta, -ac\cos^2\alpha\sin\beta, -ab\sin\alpha\cos\alpha\right)$$ $\to$ orientace dovnitř, opačná ! Je potřeba přenásobit (-1)

ϕ nepokrývá celou M, chybí $\{[-a\cos\alpha, 0, c\sin\alpha], \alpha\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\}$

(celou ji pokrýt nelze, buď by G nebylo otevřené, nebo by vznikl překryv měnící výsledky)

navíc musíme vyjmout body $\{x=0\}\cup\{y=0\}\cup\{z=0\}$

Definujeme $\tilde{G} = \left((-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\setminus\{0\}\right)\times\left((-\pi,\pi)\setminus\{\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2},0\}\right)$, kde

$\tilde{G}$ je otevřená a $\mathcal{H}^2(M\setminus\phi(\tilde{G}))=0$ ($\mathcal{H}^1$ míra nepokrytosti je konečná)

Tedy

$$\int_M \frac{dy\,dz}{x}+\frac{dz\,dx}{y}+\frac{dx\,dy}{z} = \int_{\phi(\tilde{G})}\frac{dy\,dz}{x}+\frac{dz\,dx}{y}+\frac{dx\,dy}{z} = \int_\phi f\cdot d\phi = -\int_{\tilde{G}}\left\langle f(\phi), \frac{\partial\phi}{\partial\alpha}\times\frac{\partial\phi}{\partial\beta}\right\rangle d\lambda^2 =$$

$$= +\int_{\tilde{G}} \frac{+bc\cos^{\cancel{2}}\alpha\,\cancel{\cos\beta}}{a\,\cancel{\cos\alpha}\,\cancel{\cos\beta}} + \frac{+ac\cos^{\cancel{2}}\alpha\,\cancel{\sin\beta}}{b\,\cancel{\cos\alpha}\,\cancel{\sin\beta}} + \frac{+ab\,\cancel{\sin\alpha}\cos\alpha}{c\,\cancel{\sin\alpha}}\,d\lambda^2 =$$

$$= 2\pi\cdot\left(\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\right)\cdot\underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\alpha\,d\alpha}_{=[\sin\alpha]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 1-(-1)} = 4\pi\left(\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\right).$$

Příklady na procvičení (na Stokesovu větu)

Příklad 3.58 Užitím Stokesovy věty vypočtěte $\int_c (y-z)\,dx+(z-x)\,dy+(x-y)\,dz$, kde 1-plocha $c=\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3, x^2+y^2=a^2, \frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1\}$, $a>0$, $h>0$, je orientovaná proti směru hodinových ručiček při pohledu z kladné části osy x.

Příklad 3.56 Užitím Stokesovy věty vypočtěte $\int_c (y^2+z^2)\,dx+(x^2+z^2)\,dy+(x^2+y^2)\,dz$, kde $c=\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=2Rx, x^2+y^2=2rx, 0<r<R, z>0\}$, a kterou orientujeme tak, že menší část sférické plochy, kterou tato křivka vymezuje, zůstává „po levé straně, stojíme-li na vnější straně sféry."

$\hookrightarrow$ to znamená, že jdeme-li po křivce na sféře ve směru orientace, máme menší část sféry po levé ruce