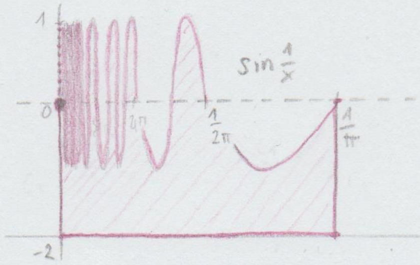
10. cvičení z MA 4 - Křivkový a plošný integrál - Greenova věta a křivkový integrál 2. druhu

Poznámky

- Ověření předpokladů Greenovy nebo Greenovy-Jordanovy věty je nezbytné, i když je v zadání již zdánlivě vše potřebné řečeno (viz 3.41: orientace kladná, parametrizace se k výpočtu nepoužije). Samozřejmě totiž existují omezené oblasti, jejichž hranice je nekonečná (například fraktály), nebo dokonce oblasti, které skoro vypadají jako počástech regulární, ale nejsou



- Připomeňme, že integrál napravo v Greenově-Jordanově větě nezávisí na parametrizaci a tedy ani na orientaci křivky. Proto musíme předpoklad orientace ověřit. (Integrál nalevo na parametrizaci závisí v tom smyslu, že jeho hodnota v absolutní hodnotě vyjde pro všechny parametrizace stejně, ale znaménko závisí na směru procházení.)

  Tedy: kladná orientace $\int_c f \cdot dc = \int_{\text{int} c} \text{curl} f \, d\lambda^2$

  záporná orientace $\int_c f \cdot dc = -\int_{\text{int} c} \text{curl} f \, d\lambda^2$

- Pomocí Greenovy (-Jordanovy) věty lze příhodně počítat obsahy ploch
  - použijeme větu v opačném směru => z dvojrozměrného integrálu bude jednorozměrný

$$\lambda^2(\Omega) = \int_\Omega 1 \, d\lambda^2 = \int_{\Omega = \text{int} c} \text{curl} f \, d\lambda^2 = \int_c f \cdot dc = \int_a^b \langle f(c(t)), c'(t) \rangle \, dt$$

přičemž za f volíme pole s $\text{curl} f = 1$: $(0, x)$

$(-y, 0)$

$\left(-\frac{y}{2}, \frac{x}{2}\right)$

Příklady

- Na přednášce uveden příklad s elipsou $\left(f(x,y) = (-y, x) \cdot \frac{1}{2}\right)$ a příklad s obloukem cykloidy $\left(f(x,y) = (0, x)\right)$

1. Příklad

Uvažujme křivku $c(t) = (2\cos t, 2\sin t - \sin 2t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Ukažte, že se jedná o jednoduchou uzavřenou počástech regulární křivku a spočtěte obsah množiny ohraničené touto křivkou.

Řešení:

Zvolíme $f(x,y)=(-y,0)$. Pak $\operatorname{curl} f = \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0-(-1)=1.$

Chceme:

$$\lambda^2(\operatorname{Int} c) = \int_{\operatorname{Int} c} 1 \, d\lambda^2 = \int_{\operatorname{Int} c} \operatorname{curl} f \, d\lambda^2 \overset{\text{Green}}{=} \int_c f \cdot dc$$

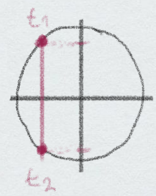
↳ budou-li splněny předpoklady

- $c(t)$ je uzavřená: $c(0)=(2,0)=c(2\pi)$
- $c(t)$ je po částech regulární: $c \in C^1[0,2\pi]$, $c'(t)=(-2\sin t, 2\cos t - 2\cos 2t)$

$$\text{a } c'(t)=\vec{0} \iff \left.\begin{matrix} \sin t = 0 \\ \wedge \\ \cos t = \cos 2t \end{matrix}\right\} \begin{matrix} t=0 \\ t=2\pi \end{matrix} \quad \text{konečně mnoho}$$

- $c(t)$ je jednoduchá:

Pro spor nechť $\exists\, t_1,t_2 \in [0,2\pi)$, $t_1 \neq t_2$ takové, že $c(t_1)=c(t_2)$



Tedy $\cos t_1 = \cos t_2 \wedge t_1 \neq t_2$, tedy $\sin t_1 = -\sin t_2$

Pak
$$2\sin t_1 - \sin 2t_1 = 2\sin t_1 - 2\sin t_1 \cos t_1 = -2\sin t_2 + 2\sin t_2 \cos t_2 =$$
$$= -2\sin t_2 + \sin 2t_2 = -(2\sin t_2 - \sin 2t_2)$$

To se rovná $2\sin t_2 - \sin 2t_2$ právě když $2\sin t_2 = 2\sin t_2 \cos t_2$

$$\left\langle \begin{matrix} \sin t_2 = 0, \text{ pak } t_2 \in \{0,\pi\} \\ \\ \sin t_2 \neq 0, \text{ pak } \cos t_2 = 1,\ t_2 = 0 \ ↯ \text{s } \sin t_2 \neq 0 \end{matrix} \right\} \text{ Tedy } \begin{matrix} t_2 = 0 \xRightarrow{\cos t_2 = \cos t_1} t_1 = 0 \\ t_2 = \pi \xRightarrow{\cos t_2 = \cos t_1} t_1 = \pi \end{matrix} \ ↯ \text{s } t_1 \neq t_2.$$

Ověříme zbylé předpoklady Greenovy-Jordanovy věty

- pole: $f(x,y)=(-y,0) \in C^1(\mathbb{R})$
- orientace – τ nemáme, buď ji z obrázku a τ vyrobíme, nebo využijeme toho, že $\lambda^2(\operatorname{Int} c) \geq 0$.
  – definujme konstantu k, později určíme, zda $k=1$ nebo $k=-1$.

$$\lambda^2(\operatorname{Int} c) = k \cdot \int_c f \cdot dc = k \cdot \int_0^{2\pi} \langle f(c(t)), c'(t) \rangle \, dt = k \cdot \int_0^{2\pi} (-2\sin t + \sin 2t) \cdot (-2\sin t) \, dt =$$

$$= k \cdot \int_0^{2\pi} (4\sin^2 t - 4\sin^2 t \cos t) \, dt = 4k \cdot \Big(\pi - \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos t \, dt}_{=0 \text{ (viz minule)}}\Big) = 4k\pi$$

$$4k\pi \geq 0 \Rightarrow k=1 \quad (k = -1 \text{ nebo } 1)$$

$$= 4\pi$$

Příklady na křivkový integrál 2. druhu bez Greenovy a Stokesovy věty

2. Příklad 3.32 Spočtěte křivkový integrál $\int_c f \cdot dc$, kde $f=(2a-y,x)$ a c je cykloida zadaná parametricky $c(t)=(a(t-\sin t), a(1-\cos t))$, $t \in [0,2\pi]$, jejíž orientace je dána touto parametrizací, $a>0$.

Řešení: $c'(t) = (a - a\cos t, a\sin t)$. $c \in C^1([0,2\pi])$ a $c'(t) \neq 0$, $t \in (0,2\pi)$, tedy c je po částech regulární křivka

Chceme

$$\int_c f \cdot dc = \int_0^{2\pi} \langle f(c(t)), c'(t) \rangle dt = \int_0^{2\pi} \left(\left(2a - a(1-\cos t)\right)(a - a\cos t) + a(t - \sin t) a \sin t \right) dt$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 t + t\sin t - \sin^2 t)\, dt = a^2 \int_0^{2\pi} \underset{\downarrow\, 1}{t} \underset{\uparrow\, -\cos t}{\sin t}\, dt =$$

$$= a^2 \left(\left[-t\cos t \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos t\, dt \right) = \underline{-2\pi a^2}$$

Příklady na procvičení

3.30 Spočtěte křivkový integrál $\int_c (x^2 - 2xy)\,dx + (y^2 - 2xy)\,dy$, kde c je část oblouku paraboly $y = x^2$ s počátečním bodem $[-1,1]$ a koncovým bodem $[1,1]$

3.31 Spočtěte křivkový integrál $\int_c \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{(x^2+y^2)}$, kde c je kladně orientovaná kružnice o poloměru a se středem v počátku

3.33 Spočtěte křivkový integrál $\int_c \frac{-y^2\,dx + x^2\,dy}{x^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{5}{3}}}$, kde c je část oblouku asteroidy $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ pro nějaké $a > 0$ z bodu $[0,a]$ do bodu $[a,0]$.

[Hint: Pozor na orientaci!]

(v $\mathbb{R}^3$: 3.34, 3.35)

3.40 Pomocí Greenovy věty spočtěte křivkový integrál $\int_c (x+y)\,dx - (x-y)\,dy$, kde c je elipsa $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$ orientovaná v kladném smyslu