9. Seminář z Matematiky 2 - 15. 4. 2021

Téma: Příklady na Lagrangeovy multiplikátory

Příklad (11)

Rozhodněte, zda má funkce $f(x,y) = x+y$ na $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, x^3+y^3-2xy=0, x\geq 0, y\geq 0\}$ extrémy a pokud ano, určete je.

Řešení

- existence extrémů

M je omezená: trikově: $0 = x^3+y^3-2xy \geq \max\{x,y\}^3 - 2\max\{x,y\}^2$

$$2\max\{x,y\}^2 \geq \max\{x,y\}^3$$

$$2 \geq \max\{x,y\}$$

M je uzavřená: $M = \{[x,y]\in\mathbb{R}^2, x^3+y^3-2xy=0\} \cap \{[x,y]\in\mathbb{R}^2, x\geq 0\} \cap \{[x,y]\in\mathbb{R}^2, y\geq 0\}$, tedy M je průnikem 3 uzavřených množin (Věta 12) a tedy je uzavřená

Množina M je tedy kompaktní (uzavřená a omezená) a f je spojitá (polynom), tedy f nabývá na M svého maxima a minima.

- podezřelé body

Int $M = \emptyset$, hledáme body na hranici - pomocí Lagrangeovy věty o multiplikátorech.

Máme $m=1$, $n=2$,

Volme $G = (0,\infty)\times(0,\infty)$

$g(x,y) = x^3+y^3-2xy$

Pak $f\in C^1(G)$, $g\in C^1(G)$ a $M = \{z\in G, g(z)=0\}\cup\{[0,0]\}$ ... $A=[0,0]$ podezřelý bod.

Hledáme body (1) druhu

$$\nabla g(x,y) = (3x^2-2y, 3y^2-2x) \overset{?}{=} \vec{o}$$

Soustava
$$3x^2-2y=0 \Rightarrow y = \frac{3x^2}{2}$$
$$3y^2-2x=0$$

$$3\cdot\frac{9x^4}{4} - 2x = 0$$

$$x\left(\frac{27}{4}x^3-2\right)=0$$

$x=0$ ... není možné ($[0,y]\notin G$)

$x=\frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{9} = \frac{2}{3}$ ... není možné ($[\frac{2}{3},\frac{2}{3}]\notin M$)

Na $M\cap G$ nejsou podezřelé body (1) druhu.

(Můžeme si povšimnout, že přidáme-li podmínky M, máme více rovnic než neznámých, často (1) nic nedá.)

Body (II) druhu

$\nabla f(x,y) = (1,1)$

Řešíme soustavu
$$\left.\begin{aligned} 1+\lambda\cdot(3x^2-2y)&=0 \\ 1+\lambda\cdot(3y^2-2x)&=0 \end{aligned}\right\} \nabla f(x,y)+\lambda\cdot\nabla g(x,y)=\vec{0}$$
$$x^3+y^3-2xy=0 \quad \to \text{přidáváme, abychom měli 3 rovnice o 3 neznámých}$$

$(1)-(2) \Rightarrow \lambda(3x^2-2y-3y^2+2x)=0 \nearrow \lambda=0$

$\searrow 3(x^2-y^2)+2(x-y)=0$

$3(x-y)(x+y)+2(x-y)=0$

$(x-y)(3(x+y)+2)=0 \nearrow x=y$

$\searrow 3x+3y+2=0$ na G nelze

$x=y$ dosadíme do (3): $2x^3-2x^2=0$

$2x^2(x-1)=0 \nearrow x=0 \ldots$ nelze

$\searrow x=1,\ y=1,\ B=[1,1]\in M$

Vyšetřili jsme všechny možnosti, máme pouze 2 podezřelé body A a B. Extrémy musí existovat. Funkce f tedy nabývá na M svého ostrého globálního maxima 2 v bodě [1,1] a ostrého globálního minima 0 v bodě [0,0].

Příklad (26)

Naleznětе maxima a minima funkce $f(x,y,z)=x^2+2xz+y^2+z$ na množině $M=\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3,\ x^2+y^2+z^2=1,\ x=y^2+z^2\}$.

Řešení

- M je omezená (podmnožina jednotkové koule)
- M je uzavřená ($M=\{[x,y,z],\ x^2+y^2+z^2=1\}\cap\{[x,y,z],\ x-y^2-z^2=0\}$, obě množiny jsou uzavřené z Věty 12)
- f je spojitá (polynom)

Tedy M je kompaktní (uzavřená a omezená) a f na M nabývá extrémů

Int $M=\emptyset$, na hranici použijeme Lagrangeovu větu o multiplikátorech.

Položme $g_1(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$, $g_2(x,y,z)=x-y^2-z^2$, $G=\mathbb{R}^3$.

Pak $f,g_1,g_2\in C^1(G)$, $\nabla g_1(x,y,z)=(2x,2y,2z)$

$\nabla g_2(x,y,z)=(1,-2y,-2z)$

$\nabla f(x,y,z)=(2x+2z,2y,2x+1)$

Body (I) druhu

Tam, kde $\exists c_1, c_2$ alespoň jeden nenulový, že $c_1 \cdot \nabla g_1(x,y,z) + c_2 \nabla g_2(x,y,z) = 0$

$$c_1 2x + c_2 1 = 0$$
$$c_1 \cdot 2y - c_2 \cdot 2y = 0$$
$$c_1 \cdot 2z - c_2 \cdot 2z = 0$$

Rozdělíme na 2 případy: $c_1 = c_2$, $c_1 \neq c_2$

ad $c_1 = c_2$: pak $x = \frac{-c_1}{2 \cdot c_1} = -\frac{1}{2}$ ale $x = -\frac{1}{2}$ nesplňuje $g_2 = 0$.

ad $c_1 \neq c_2$: pak $z = 0$, $y = 0$. Z $g_2 = 0$ pak i $x = 0$, ale to nesplňuje $g_1 = 0$.

Tedy nejsou žádné body (I) druhu.

(opět jsme navíc použili i rovnice $g_1(x,y,z) = 0$, $g_2(x,y,z) = 0$).

(Jak na to se znalostí matic a lineární (nezávislosti:

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & -2y & -2z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x+1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{LZ pokud} \begin{cases} 2x+1=0 \\ 2y=2z=0 \end{cases}$$
)

Body (II) druhu

Řešíme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 2x + 2z + \lambda_1 2x + \lambda_2 &= 0 \\ 2y + \lambda_1 2y - \lambda_2 2y &= 0 \\ 2x + 1 + \lambda_1 2z - \lambda_2 2z &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 &= 0 \\ x - y^2 - z^2 &= 0 \end{aligned}$$

(4)+(5) $x^2 + x - 1 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ nesplňuje $g_2 = 0$. Tedy $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

(2) $2y(1 + \lambda_1 - \lambda_2) = 0$

ad $y = 0$

Pak (5) $\Rightarrow z^2 = x - y^2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow z = \pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$

Podezřelé body $\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 0, \pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right]$

ad $1 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0$

Pak (3) $\Rightarrow 2x + 1 + 2z(\lambda_1 - \lambda_2) = 2x + 1 - 2z = 0$

Tedy $z = \frac{2x+1}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}+1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} > 1$ nesplňuje $g_1 = 0$.

Získali jsme 2 podezřelé body

$f\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 0, \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right) = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} + 0 + \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$ maximum

$f\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 0, -\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right) = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} + 0 - \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$ minimum

Závěr

Funkce f nabývá na M svého ostrého globálního maxima v bodě $\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 0, \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right]$ a ostrého globálního minima v bodě $\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 0, -\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right]$.

Doporučení: projděte si řešení příkladu (14)

(asi nejkomplexnější možné zadání)

(také na supersemináři)