# 8. Seminář z Matematiky 2 - 8. 4. 2021

## Téma: Extrémy funkcí více proměnných - pokračování

Společné zadání: Nalezněte absolutní extrémy funkce $f$ na množině $M$

Příklad (5)

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z \quad , \; M = \mathbb{R}^3$$

Řešení: Opět "elementárními" metodami (kreativně)

Vidíme, že $M$ není omezená, tedy není kompaktní, tedy extrémy nemusí existovat

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^3) \Rightarrow$ extrémy mohou být pouze ve stacionárních bodech ($\mathbb{R}^3$ je otevřená, použijeme V17)

vyšetříme stacionární body:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= 2x+2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= 2y+4 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= 2z-6 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &[2x+2, 2y+4, 2z-6] = [0,0,0] \\ &\qquad \Leftrightarrow \\ &[x,y,z] = [-1,-2,3] \end{aligned}$$

Stacionární bod je pouze jeden.

Je to bod extrému?

Metoda doplnění na čtverec nám dá

$$f(x,y,z) = \underbrace{(x+1)^2}_{= x^2+2x+1} + \underbrace{(y+2)^2}_{= y^2+4y+4} + \underbrace{(z-3)^2}_{= z^2+6z+9} - 1 - 4 - 9 = \underbrace{(x+1)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(y+2)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(z-3)^2}_{\geq 0} - 14$$

Vidíme, že je-li $[x,y,z] \neq [-1,-2,3]$, $f(x,y,z) > -14$.

Závěr: $[-1,-2,3]$ je ostré globální minimum. Žádný další extrém neexistuje.

Příklad (6)

$$f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}, \; M = \mathbb{R}^2.$$

Řešení

Povšimneme si "vnitřní funkce", můžeme použít parametrizaci.

Definujeme $F(r) = r \cdot e^{-r}$, $r \in \langle 0, \infty)$.

Vyšetříme extrémy funkce $F$, poté nalezneme příslušné hodnoty funkce $x^2+y^2$.

Interval $\langle 0, \infty)$ je uzavřený, není to kompaktní množina, extrémy nemusí existovat.

Body podezřelé z extrému : $r=0$ nebo stacionární body v $(0,\infty)$.

$F'(r) = e^{-r} - re^{-r} = e^{-r}(1-r)$

$F'(r)=0 \iff r=1$. Navíc $F'(r)>0$ pro $r \in (0,1)$, tedy je zde $F$ rostoucí,
$F'(r)<0$ pro $r \in (1,\infty)$, tedy je zde $F$ klesající.

Bod $r=1$ je tedy lokální maximum funkce $F$.

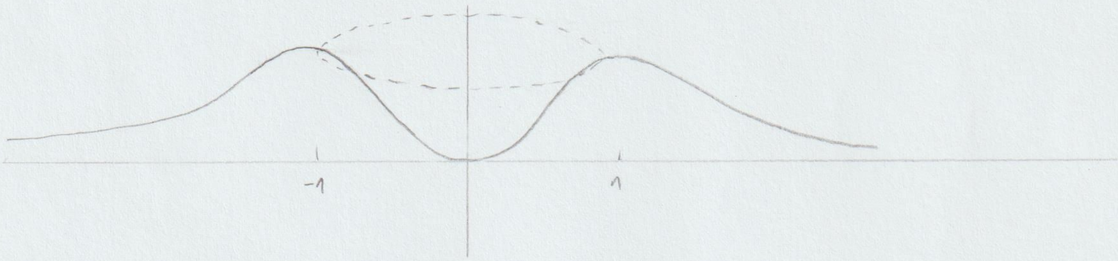
Navíc se jedná o globální maximum.

$F(1) = e^{-1}$

Pozorování: $F(r) \geq 0$ a $F(0)=0 \iff r=0$. Tedy v bodě $r=0$ funkce $F$ nabývá globálního minima.

Funkce $x^2+y^2$ nabývá hodnoty $0 \iff [x,y]=[0,0]$
$x^2+y^2$ nabývá hodnoty $1 \iff [x,y] \in$ jednotkové kružnice

Závěr: Funkce $f$ nabývá ostrého globálního minima $0$ v bodě $[0,0]$ a globálního maxima $e^{-1}$ v bodech množiny $\{[x,y],\ x^2+y^2=1\}$.




Příklad (9)

$f(x,y) = (x+y)e^{-2x-3y}$, $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$.

Řešení

$M$ je uzavřená, ale není omezená, extrémy nemusí existovat.

Vyšetříme 1) na vnitřku $(0,\infty)\times(0,\infty)$

Z nutné podmínky existence extrému (V 17) víme, že hledáme body, kde některá parciální derivace neexistuje, nebo jsou obě nulové

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{-2x-3y} + (x+y)\cdot e^{-2x-3y}\cdot(-2) = e^{-2x-3y}(1-2x-2y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{-2x-3y} + (x+y)e^{-2x-3y}\cdot(-3) = e^{-2x-3y}(1-3x-3y)$$

$f \in C^\infty((0,\infty)\times(0,\infty)) \to$ hledáme pouze stacionární body

Soustava $1-2x-2y=0$ ale nemá řešení. Neexistuje žádný stacionární bod.
$1-3x-3y=0$

2) na hranici: rozdělíme ji na 3 části: $x \in (0,\infty), y=0$
$y \in (0,\infty), x=0$
$x=y=0 \Rightarrow$ Podezřelý bod: $[0,0]$, $f(0,0)=0$

Definujeme

- $g_1(t) = f(t,0) = t \cdot e^{-2t}$, $t \in (0,\infty)$

  $(0,\infty)$ je otevřená, vyšetřujeme extrémy funkce $g_1$

  $g_1'(t) = t \cdot e^{-2t} \cdot (-2) + e^{-2t} = e^{-2t}(-2t+1)$.

  $g_1'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \Rightarrow$ Podezřelý bod: $[\frac{1}{2}, 0]$, $f(\frac{1}{2},0) = \frac{1}{2}e^{-1}$.

- $g_2(t) = f(0,t) = t \cdot e^{-3t}$, $t \in (0,\infty)$

  $g_2'(t) = t \cdot e^{-3t}(-3) + e^{-3t} = e^{-3t}(-3t+1)$

  $g_2'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3} \Rightarrow$ Podezřelý bod: $[0,\frac{1}{3}]$, $f(0,\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}e^{-1}$.

Pozorování: $f(x,y) \geq 0$ na $M$ a $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow [x,y] = [0,0] \Rightarrow$ Bod $[0,0]$ je globální minimum

Existuje maximum? Zatím to nevíme
(Funkce by mohla růst pro $x,y \to \infty$. My ale ukážeme, že neroste.)

Metoda: Vyrobit kompakt

Myšlenka: pro $x+y$ dost veliké bude hodnota $f$ menší než $\frac{1}{2}e^{-1}$
Tyto $x,y$ "odstřihneme", zůstane nám uzavřená omezená množina, na níž bude hodnota $\frac{1}{2}e^{-1}$ maximum $\Rightarrow$ bude též maximum na $M$.

$0 \leq (x+y)e^{-2x-3y} \leq (x+y)e^{-2x-2y} = (x+y)e^{-2(x+y)}$

Definujeme $h(r) = re^{-2r}$. Tato funkce má lokální extrém v $\frac{1}{2}$, $h(r)$ klesá na $(\frac{1}{2},\infty)$.
Tedy např. pro $r \geq 1$: $h(r) < \frac{1}{2}e^{-1}$.

$M = \{[x,y], x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\} \cup \{[x,y], x \geq 0, y \geq 0, x+y > 1\} = M_1 \cup M_2$

- $\forall [x,y] \in M_2$: $f(x,y) < \frac{1}{2}e^{-1}$

- $M_1$ je uzavřená a omezená množina, tedy je kompaktní. Funkce $f$ na $M_1$ nabývá extrémů: minimum v $[0,0]$
  maximum v $[\frac{1}{2},0]$, neboť na přímce $x+y=1$ je $f < \frac{1}{2}e^{-1}$, zbytek je vyšetřen.

Závěr

Funkce $f$ nabývá na $M$ svého ostrého globálního maxima $\frac{1}{2}e^{-1}$ v bodě $[\frac{1}{2}, 0]$ a svého ostrého globálního minima 0 v bodě $[0,0]$.

## Lagrangeovy multiplikátory

- metoda na určování podezřelých bodů pro množiny zadané rovnostmi.

Věta (Lagrangeova věta o multiplikátorech) - formulovaná jako nutná podmínka existence extrému

Nechť $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$

$G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená

$f \in C^1(G)$, $g_1, \dots, g_m \in C^1(G)$

$M = \{z \in G, g_1(z) = 0, \dots, g_m(z) = 0\}$.

Je-li $\tilde{z} \in M$ bodem lokálního extrému funkce $f$ vzhledem k množině $M$, pak nastane alespoň jedna z podmínek

(I) $\nabla g_1(\tilde{z}), \dots, \nabla g_m(\tilde{z})$ jsou lineárně závislé (tedy $\exists \overbrace{c_1, \dots, c_m}^{\text{alespoň jedno nenulové}} : c_1 \nabla g_1(\tilde{z}) + \dots + c_m \nabla g_m(\tilde{z}) = \vec{o}$)

(II) $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m : \nabla f(\tilde{z}) + \lambda_1 \nabla g_1(\tilde{z}) + \dots + \lambda_m \nabla g_m(\tilde{z}) = \vec{o}$

Příklad příkladu

Rozhodněte, zda má funkce $f(x,y) = x + y$ na $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, x^3 + y^3 - 2xy = 0, x \geq 0, y \geq 0\}$ extrémy a pokud ano, určete je.

Strategie řešení:
1) máme-li kompakt, dokážeme to a ukážeme existenci extrémů
2) vyšetříme vnitřek (zde prázdný)
3) na hranici vyšetříme body I. druhu a II. druhu
4) porovnáme hodnoty v podezřelých bodech

"Descartesův list"