6. Seminář z Matematiky 2 - 25. 3. 2021

Téma: Implicitní funkce

Příklad (2)

Ukažte, že rovnice $e^{xy} + \sin y + y^2 = 1$ určuje v jistém okolí bodu $[2,0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x. Spočtěte první a druhou derivaci v bodě 2.

Řešení

Označme $F(x,y) = e^{xy} + \sin y + y^2 - 1$

Pak (i) $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$ (součet exponenciály, sinu a polynomu)

(ii) $F(2,0) = e^{2\cdot 0} + \sin 0 + 0^2 - 1 = 1 - 1 = 0$

(iii) $\dfrac{\partial F}{\partial y}(2,0) = (xe^{xy} + \cos y + 2y)(2,0) = 2\cdot e^0 + 1 + 0 = 3 \neq 0.$

Ověřili jsme předpoklady VOIF a tedy $\exists U$ okolí bodu 2 a V okolí bodu 0, že $\forall x \in U\ \exists y \in V: F(x,y) = 0$. Označíme-li $y = \varphi(x)$, pak $\varphi \in C^1(U)$.

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,\varphi(x))} = -\frac{\varphi(x)e^{x\varphi(x)}}{xe^{x\varphi(x)} + \cos(\varphi(x)) + 2\varphi(x)}$$

$$\varphi'(2) = -\frac{0\cdot e^{2\cdot 0}}{3} = 0$$

$$\varphi''(x) = -\frac{\left(\varphi'(x)e^{x\varphi(x)} + \varphi(x)e^{x\varphi(x)}\cdot(\varphi(x) + x\varphi'(x))\right)\left(xe^{x\varphi(x)} + \cos(\varphi(x)) + 2\varphi(x)\right) - \varphi(x)e^{x\varphi(x)}\left(e^{x\varphi(x)} + xe^{x\varphi(x)}(\varphi(x) + x\varphi'(x))\right.}{\left(xe^{x\varphi(x)} + \cos(\varphi(x)) + 2\varphi(x)\right)^2}$$

$$\frac{\left.-\sin(\varphi(x))\varphi'(x) + 2\varphi'(x)\right)}{}$$

$$\varphi''(2) = -\frac{(0+0)\cdot(2+1+0) - 0\cdot(1+0-0+0)}{3^2} = 0$$

Závěr: první i druhá derivace implicitní funkce v bodě 2 je rovna 0

Věta (VOIF - více funkcí)

Nechť $m, n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $G \subset \mathbb{R}^{n+m}$ otevřená

$\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{y} \in \mathbb{R}^m$, $[\tilde{x},\tilde{y}] = [\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m] \in G$

$F_j : G \to \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$

a nechť platí

(i) $\forall j \in \{1, \dots, m\}: F_j \in C^k(G)$

(ii) $\forall j \in \{1, \dots, m\}: F_j(\tilde{x},\tilde{y}) = 0$

(iii) $$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\tilde{x},\tilde{y}) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(\tilde{x},\tilde{y}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(\tilde{x},\tilde{y}) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(\tilde{x},\tilde{y}) \end{vmatrix} \neq 0$$

Máme bod $\in \mathbb{R}^{n+m}$
a m funkcí
které nabývají všechny v tom bodě 0
a jsou na jeho okolí hladké
a nemají tam podle m proměnných
nulovou "derivaci".
Pak umíme dostat nových m
funkcí závislých na n proměnných
Dohromady vykreslují množinu,
kde ty původní funkce byly 0.

Pak existují okolí $U\subset\mathbb{R}^n$ bodu $\tilde{x}$ a okolí $V\subset\mathbb{R}^m$ bodu $\tilde{y}$ taková, že

$$\forall x\in U\ \exists!\, y\in V\ \forall j\in\{1,\dots,m\}: F_j(x,y)=0$$

Označíme-li souřadnice y jako $y_j=\varphi_j(x)$, pak $\varphi_j\in C^k(U)$, $j\in\{1,\dots,m\}$.

Poznámky:

- pro $m=1$ odpovídá tomu, co jsme měli minule
- $|\ddots|$ se nazývá determinant, budeme se mu věnovat později v semestru

  $|a|=a$ (myšleno jako determinant, ne absolutní hodnota)

  $$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\cdot d - c\cdot b$$

  $$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei+dhc+gbf-ceg-fha-ibd$$

- derivace lze získat tzv. "proderivováním": derivujeme vztahy podle příslušné proměnné, nezapomeneme, že některé "proměnné" jsou funkce, dostaneme soustavu a můžeme dosadit, co známe.

  alternativně: vzoreček s determinanty

  $$\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}(x) = -\frac{\begin{array}{c} \\ \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_i} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ & & \vdots_{\,j} & & \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_i} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}\end{array}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}}$$

  nahradíme j-tý sloupec derivacemi podle x_i

- v příkladech na implicitky se mohou objevit doplňující otázky

  1 proměnná: derivace, druhá derivace, monotonie, extrémy, konvexita, stacionární body, ...

  více proměnných: parciální derivace, gradient (argument s C^1), tečná nadrovina, ...

Příklad (15)

Ukažte, že vztahy
$$\left.\begin{aligned} x &= u\cos\frac{v}{u} \\ y &= u\sin\frac{v}{u} \end{aligned}\right\}\ \text{kolik rovnic, tolik implicitních funkcí}$$

definují na okolí bodu $[1,0]=[x,y]$ hladké funkce $u(x,y)$, $v(x,y)$, pro které platí $u(1,0)=1$, $v(1,0)=0$.

Určete gradient funkce $u(x,y)$ v bodě $[1,0]$.

Je tento bod stacionárním bodem funkce u?

Řešení

Položme $\underbrace{F_1(x,y,}_{\text{budou proměnné}}\underbrace{u,v)}_{\text{budou funkce}} = u\cos\frac{v}{u} - x$

$F_2(x,y,u,v) = u\sin\frac{v}{u} - y$

Položme $G = \mathbb{R}^2 \times (0,\infty)\times\mathbb{R}$. Pak $[\underset{x}{1},\underset{y}{0},\underset{u}{1},\underset{v}{0}] \in G$.

Pak (i) F_1, F_2 jsou třídy C^∞ na G

(ii) $F_1(1,0,1,0) = 1-1 = 0$

$F_2(1,0,1,0) = 0-0=0$

(iii) $$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v}\end{vmatrix}(1,0,1,0) = \begin{vmatrix} \cos\frac{v}{u} - u\cdot\sin\left(\frac{v}{u}\right)\cdot\frac{-v}{u^2} & -u\sin\left(\frac{v}{u}\right)\cdot\frac{1}{u} \\ \sin\frac{v}{u} + u\cdot\cos\left(\frac{v}{u}\right)\cdot\frac{-v}{u^2} & u\cos\left(\frac{v}{u}\right)\cdot\frac{1}{u}\end{vmatrix}(1,0,1,0) = \begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} = 1-0 = 1 \neq 0$$

Ověřili jsme předpoklady VOIF a tedy existují okolí U bodu $[1,0]$ a V bodu $[1,0]$, že $\forall [x,y]\in U\ \exists!\,[u,v]\in V: F_1(x,y,u,v)=0 \wedge F_2(x,y,u,v)=0$. Označíme-li $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$, pak $u(x,y)$ a $v(x,y)$ jsou třídy C^∞ na U.

Spočteme derivace funkce u

1) proderivováním: derivujeme rovnice podle x, u a v jsou funkce:

$$1 = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\cos\frac{v}{u} + u\cdot\left(-\sin\left(\frac{v}{u}\right)\right)\cdot\frac{\frac{\partial v}{\partial x}\cdot u - \frac{\partial u}{\partial x}\cdot v}{u^2}$$

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\sin\frac{v}{u} + u\cdot\cos\left(\frac{v}{u}\right)\cdot\frac{\frac{\partial v}{\partial x}\cdot u - \frac{\partial u}{\partial x}\cdot v}{u^2}$$

Dosadíme hodnotu u a v v bodě $[x,y]=[1,0]$ (tedy $u(1,0)=1$, $v(1,0)=0$)

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \frac{\partial u}{\partial x}(1,0)\cdot 1 + 1\cdot 0\cdot \frac{\partial u}{\partial x}\cdot 0 \\ 0 &= \frac{\partial u}{\partial x}\cdot 0 + 1\cdot 1\cdot\frac{\frac{\partial v}{\partial x}\cdot 1 - \frac{\partial u}{\partial x}\cdot 0}{1}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(1,0) &= 1 \\ \frac{\partial v}{\partial x}(1,0) &= 0\end{aligned}$$

Obdobně derivujeme podle y

$$0 = \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\cos\frac{v}{u} + u\left(-\sin\left(\frac{v}{u}\right)\right)\cdot\frac{\frac{\partial v}{\partial y}\cdot u - \frac{\partial u}{\partial y}\cdot v}{u^2}$$

$$1 = \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\sin\frac{v}{u} + u\cdot\cos\left(\frac{v}{u}\right)\cdot\frac{\frac{\partial v}{\partial y}\cdot u - \frac{\partial u}{\partial y}\cdot v}{u^2}$$

Po dosazení

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial u}{\partial y}(1,0)\cdot 1 + 1\cdot 0 \\ 1 &= \frac{\partial u}{\partial y}(1,0)\cdot 0 + 1\cdot 1\cdot\frac{\frac{\partial v}{\partial y}(1,0)\cdot 1 - \frac{\partial u}{\partial y}(1,0)\cdot 0}{1}\end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y}(1,0) &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial y}(1,0) &= 1\end{aligned}$$

Jelikož $u\in C^1(U)$, můžeme napsat gradient $\nabla u(1,0) = [1,0]$.

Bod $[1,0]$ není stacionárním bodem funkce u, neboť $\frac{\partial u}{\partial x}(1,0)\neq 0$.

2) Vzorcem

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,0) = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix}(1,0,1,0)}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix}(1,0,1,0)} = -\frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{1} = -\frac{-1}{1} = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(1,0) = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix}(1,0,1,0)}{1} = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{1} = 0$$

Pozorování: proderivování bývá rychlejší, jedná-li se nám o derivace podle jedné proměnné, vzorec bývá rychlejší, jedná-li se nám o jednu funkci. (Ale záleží i na osobním vkusu.)