5. Seminář z Matematiky 2 - 18.3.2021

Téma: Parciální derivace - opakování; Věta o implicitní funkci

1) Několik posledních příkladů na parciální derivace

- u zkoušky úloha typu:

"Určete a nakreslete definiční obor a vyšetřete parciální derivace"

tedy je třeba umět vyšetřit derivace i v "nepříjemných bodech"

a) Rozcvička:

$$f(x,y) = e^{xy} + \sin(x+y)$$

b) Aplikace řetízkového pravidla:

Spočtěte parciální derivace funkce $F(x,y) = f(\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y))$

kde
$$f(u,v) = u^2 + 2uv$$
$$\varphi_1(x,y) = e^{xy} + \cos y$$
$$\varphi_2(x,y) = y \cdot \sin(xy)$$

c) Příklady ze starých zkouškových písemek

$$f(x,y) = e^{x^2-y} + 7y + |xy|$$

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x+y-1}$$

$$f(x,y) = \sqrt[3]{\log\left(\frac{x}{y}\right)}$$

(Více podobných příkladů s řešením naleznete na stránce semináře.)

↳ příklady z let 97/98, pojmu totální diferenciál není třeba si všímat

2) Věta o implicitní funkci

(příště: Věta o implicitních funkcích)

Věta (VOIF)

Nechť $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je otevřená množina, $F: G \to \mathbb{R}$, $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{y} \in \mathbb{R}$, $[\tilde{x}, \tilde{y}] \in G$ a platí

(i) $F \in C^1(G)$

(ii) $F(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$

(iii) $\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) \neq 0$.

Pak existují okolí $U \subset \mathbb{R}^m$ bodu $\tilde{x}$ a okolí $V \subset \mathbb{R}$ bodu $\tilde{y}$ taková, že

$$\forall x \in U \ \exists! \, y \in V : F(x,y) = 0.$$

$\exists!$: „existuje právě jedno"

Označíme-li toto y jako $\varphi(x)$, pak $\varphi \in C^1(U)$ a $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) = - \dfrac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))}$, $x \in U$, $j \in \{1, \dots, m\}$.

(VOIF neimplikuje prostotu funkce φ!)

- Většinou se příklady zadávají pomocí rovnice

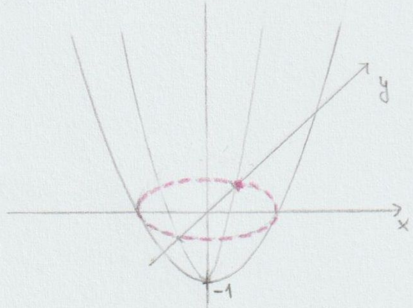
Např: Ukažte, že $x^2+y^2=1$ určuje na okolí bodu $[0,1]$ implicitně zadanou funkci:

Přepíšeme na $F(x,y) = x^2+y^2-1$

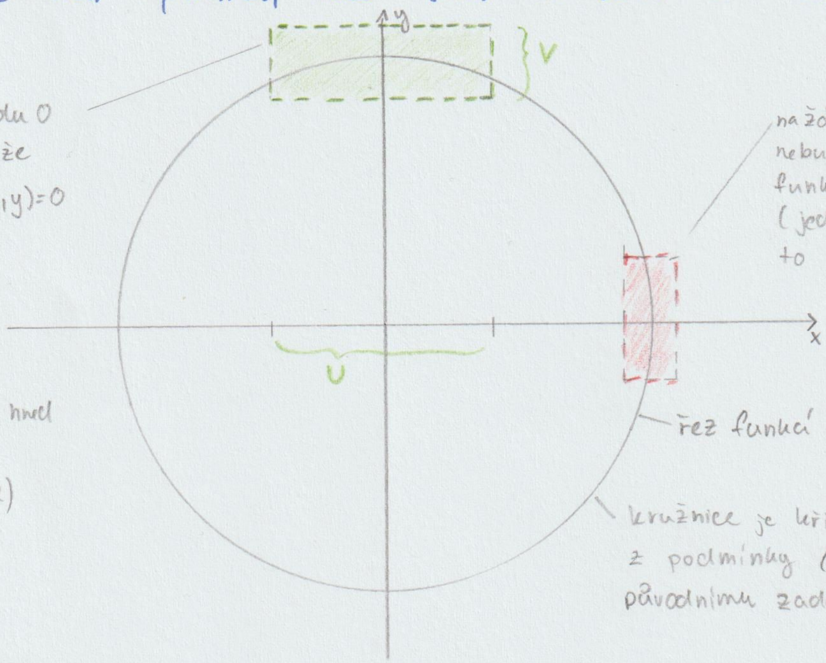
Pak (i) $F(x,y) \in C^1(\mathbb{R}^2)$

(ii) $F(0,1) = 0+1-1 = 0$

(iii) $\frac{\partial F}{\partial y}(0,1) = 2 \neq 0$



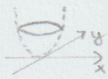
Vidíme, že předpoklady jsou ověřeny, ale například v bodě $[1,0]$ by sice (ii) platila, ale (iii) ne. Co to znamená?



zde $\exists$ okolí U bodu 0 a okolí V bodu 1, že $\forall x \in U \ \exists! \, y \in V : F(x,y) = 0$

(v tomto případě dokonce víme, že $\varphi(x) = \sqrt{1-x^2}$, ale takovéto vyjádření nemáme hned vždy a díky VOIF se bez něj obejdeme)

na žádném okolí bodu $x=1$ nebude část kružnice odpovídat funkci (jednomu x by příslušely 2 hodnoty y) to lze zjistit z $\frac{\partial F}{\partial y}$



řez funkcí $x^2+y^2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ v úrovni 1

kružnice je křivka, kterou dostáváme z podmínky (ii), odpovídá také původnímu zadání

zbytek řešení!

Tedy dle VOIF $\exists$ okolí U bodu 0 a okolí V bodu 1, že $\forall x \in U \ \exists! \, y \in V : F(x,y) = 0$.
Označíme-li $\varphi(x) = y$, pak $\varphi \in C^1(U)$.

Navíc $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0) = \varphi'(0) = - \dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}(0,1)}{\frac{\partial F}{\partial y}(0,1)} = 0$.

Umíme to i obecně $\varphi'(x) = - \dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))} = - \dfrac{2x}{2\varphi(x)} = - \dfrac{x}{\varphi(x)}$

z čehož lze spočítat i druhou derivaci.

- Povšimneme si, že tedy umíme dělat i "řezy" jinde, než v nule, jak by se zdálo z podmínky (ii), prostě stačí odečíst vhodnou konstantu.

Příklad

Ukažte, že vztah $\frac{x}{z} = \sin(yz)$ určuje v jistém okolí bodu $[1, \frac{\pi}{2}, 1]$ implicitně zadanou funkci proměnných x a y. Spočtěte první derivace v bodě $[1, \frac{\pi}{2}]$, odůvodněte existenci gradientu v bodě $[1, \frac{\pi}{2}]$ a určete jej.

Řešení

Definujeme $F(x,y,z) = \frac{x}{z} - \sin(yz)$

Pak (i) $F \in C^1(B([1, \frac{\pi}{2}, 1], \frac{1}{2}))$

(ii) $F(1, \frac{\pi}{2}, 1) = \frac{1}{1} - \sin(\frac{\pi}{2} \cdot 1) = 1 - 1 = 0$

(iii) $\frac{\partial F}{\partial z}(1, \frac{\pi}{2}, 1) = \left(-x \frac{1}{z^2} - \cos(yz) \cdot y\right)(1, \frac{\pi}{2}, 1) = -1 - 0 = -1 \neq 0$

Ověřili jsme předpoklady VOIF a tedy $\exists$ U okolí bodu $[1, \frac{\pi}{2}]$ a V okolí bodu 1, že $\forall [x,y] \in U \ \exists! z \in V: F(x,y,z) = 0$. Označíme-li $z = \varphi(x,y)$, pak $\varphi \in C^1(U)$.

$(\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{z})$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(1, \frac{\pi}{2}) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1, \frac{\pi}{2}, 1)}{\frac{\partial F}{\partial z}(1, \frac{\pi}{2}, 1)} = -\frac{1}{-1} = 1$$

$(\frac{\partial F}{\partial y} = -\cos(yz) z)$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(1, \frac{\pi}{2}) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(1, \frac{\pi}{2}, 1)}{\frac{\partial F}{\partial z}(1, \frac{\pi}{2}, 1)} = -\frac{0}{-1} = 0$$

φ je na okolí bodu $[1, \frac{\pi}{2}]$ třídy C^1, a tedy existuje gradient a je roven $\nabla \varphi(1, \frac{\pi}{2}) = [1, 0]$.