4. Seminář z Matematiky 2 - 11. 3. 2021

Poznámky

- v předchozích cvičeních je používáno pro uzavřený interval $[\,,\,]$ místo $\langle\,,\,\rangle$.
- s našimi definicemi může být parciální derivace rovna $\pm\infty$, ale není to tak všude
- 14.3. Světový den matematiky

Opakování

Téma: Parciální derivace - pokračování

- $\mathcal{C}^1$ funkce: Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ neprázdná otevřená. Má-li $f: G \to \mathbb{R}$ v každém bodě množiny G spojité všechny parciální derivace, pak je f třídy $\mathcal{C}^1$, $f \in C^1(G)$.
- tečná nadrovina ke grafu funkce $f \in C^1(G)$ v bodě $[a, f(a)]$, $a \in G$, je dána předpisem

$$T: x \to f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1 - a_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x_n - a_n), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

- řetízkové pravidlo: Je-li funkce F na $G \subset \mathbb{R}^s$, $s \in \mathbb{N}$, dána předpisem

$$F(x) = f(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_r(x)), \quad x \in G,$$

kde $r \in \mathbb{N}$, $\varphi_1, \dots, \varphi_r \in C^1(G)$, $f \in C^1(H)$, $[\varphi_1(x), \dots, \varphi_r(x)] \in H$ pro každé $x \in G$, pak pro $a \in G$ a $b = [\varphi_1(a), \dots, \varphi_r(a)]$ platí

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial y_i}(b) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(a).$$

- Gradient: $\nabla f(a) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right]$ pro $f \in C^1(G)$, $a \in G$.

Příklady

1) Pro funkci $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ určete definiční obor, vypočtěte parciální derivace všude, kde existují a nalezněte rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě $[1, -2, \sqrt{2}]$.

Definiční obor: $\mathbb{R}^2$

Spojitost: f je spojitá v každém bodě $\mathbb{R}^2$

parciální derivace

- na $xy > 0$ (tedy $(x>0 \wedge y>0) \vee (x<0 \wedge y<0)$) derivujeme funkci $\sqrt{xy}$: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{xy}} \cdot y$

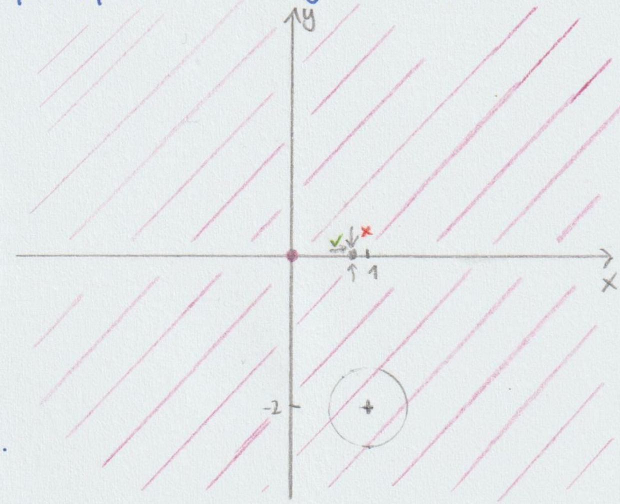
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{xy}} \cdot x$$

- na $xy < 0$ derivujeme funkci $\sqrt{-xy}$: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-xy}} \cdot -y$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-xy}} \cdot -x$$

- pro $x \neq 0, y \neq 0$ tedy dohromady máme $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sgn}(xy) \cdot y}{\sqrt{|xy|}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sgn}(xy) \cdot x}{\sqrt{|xy|}}$.

(Případně si lze pamatovat, že $(|x|)'(z) = \operatorname{sgn}(z)$, $z \neq 0$, a derivovat jako složenou funkci)



- Zbylé body (na osách) vypočteme z definice

Nejprve $[0,0]$ (superspeciální případ)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x-0} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \quad \text{obdobně.}$$

Nyní nechť $x_0 \neq 0$, zaměříme se na body $[x_0, 0]$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x,0)-f(x_0,0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} 0 = 0$$

$-1 \quad 1 \quad \infty$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(x_0,y)-f(x_0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{|x_0 y|}}{y} = \lim_{y\to 0} \operatorname{sgn} y \cdot \frac{1}{|y|} \cdot \sqrt{|x_0 y|} = \lim_{y\to 0} \operatorname{sgn} y \cdot \sqrt{\frac{|x_0|}{|y|}}$$

Tato limita však neexistuje (zprava ∞, zleva $-\infty$), tedy neexistuje ani parciální derivace

Pro $y_0 \neq 0$ a $[0,y_0]$ obdobně

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y_0) \quad \text{neexistuje}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,y_0) = 0.$$

Jsou parciální derivace v bodě $[0,0]$ spojité?

Ne. V $[0,\varepsilon]$ ani $\frac{\partial f}{\partial x}$ neexistuje, v $[\varepsilon,0]$ neexistuje $\frac{\partial f}{\partial y}$, v dalších blízkých bodech jsou derivace daleko od nuly atd.

Jsou parciální derivace v bodě $[1,-2]$ spojité?

Na $B([1,-2], \overset{\text{například}}{\tfrac{1}{2}})$ odpovídají parciální derivace funkcím

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sgn}(x\,y)\,y}{\sqrt{|xy|}} \quad \text{a} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sgn}(x\,y)\,x}{\sqrt{|xy|}}$$

a ty jsou zde spojité. Tedy je funkce f na $B([1,-2],\frac{1}{2})$ třídy C^1.

Tečná rovina

Funkce f je na okolí bodu $B([1,-2],\frac{1}{2})$ třídy C^1 a tedy je tečná rovina dána předpisem

$$T(x,y) = \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(x-1) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot(y+2)$$

Poznámka

V příkladu 3 v Semináři 3 funkce na okolí $[0,0]$ také není C^1.

Parciální derivace jsou sice všude 0, ale na osách bez 0 některé neexistují.

Nechce se, aby $\frac{\partial f}{\partial x}$ byla spojitá na přímce, ale na celém okolí

2) Nechť $G(x,y,z) = (x^2 \cdot e^z + \sin(x \cdot y),\ x \cdot z - y)$ a $F(u,v) = uv - \sin(v) + 2u$

Spočtěte všechny parciální derivace funkce $F \circ G$ a určete rovnici tečné nadroviny v $[0,0,0,0]$.

Řešení

Jedná se o jiný zápis pro skládání funkcí:

$$\varphi_1(x,y,z) = x^2 \cdot e^z + \sin(x \cdot y) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$\varphi_2(x,y,z) = x \cdot z - y : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$F(u,v) = uv - \sin(v) + 2u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

Derivujeme funkci $F(\varphi_1, \varphi_2)(x,y,z) = \phi(x,y,z)$

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) = v + 2 \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x,y,z) = 2xe^z + \cos(xy) \cdot y \qquad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x,y,z) = z$$

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u,v) = u - \cos(v) \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x,y,z) = \cos(xy) \cdot x \qquad \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(x,y,z) = -1$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}(x,y,z) = x^2 e^z \qquad \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}(x,y,z) = x$$

Podle řetízkového pravidla

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial F}{\partial u}(\varphi_1(x,y,z), \varphi_2(x,y,z)) \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}(\varphi_1(x,y,z), \varphi_2(x,y,z)) \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x,y,z) =$$

$$= (x \cdot z - y + 2) \cdot (2xe^z + \cos(xy) \cdot y) + (x^2 e^z + \sin(x \cdot y) - \cos(xz - y)) \cdot z$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y,z) = (x \cdot z - y + 2) \cdot \cos(xy) \cdot x + (x^2 e^z + \sin(xy) - \cos(xz - y)) \cdot (-1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(x,y,z) = (x \cdot z - y + 2)\, x^2 e^z + (x^2 e^z + \sin(xy) - \cos(xz - y)) \cdot x$$

Tečná nadrovina je dána předpisem $(\phi \in C^1(\mathbb{R}^3))$

$$T(x,y,z) = 0 + 0 \cdot x - 1y + 0 \cdot z = -y$$