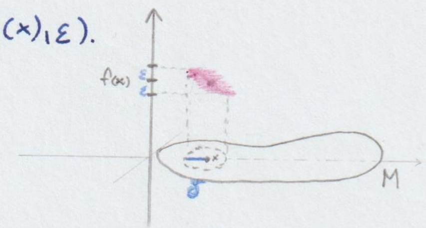
3. seminář z Matematiky 2 - 4.3.2021

Téma: Spojitost funkcí více proměnných, parciální derivace

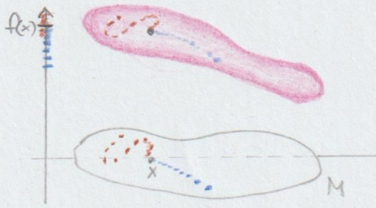
Opakování teorie

- Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ a $x \in M$. Funkce f je spojitá v bodě x vzhledem k M, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall y \in B(x,\delta) \cap M : f(y) \in B(f(x),\varepsilon).$$



- Funkce f je spojitá na množině M, jestliže je spojitá v každém bodě $x \in M$ vzhledem k M.
- Skalární násobek spojité funkce je spojitý, součet a součin dvou spojitých funkcí je spojitý, složení spojitých funkcí je spojité, ...
- Následující tvrzení jsou ekvivalentní (Heine):
  - Funkce f je spojitá v x vzhledem k M.
  - $\lim\limits_{j\to\infty} f(x^j) = f(x)$ pro každou posloupnost $\{x^j\}_{j=1}^{\infty} \subset M$ splňující $\lim\limits_{j\to\infty} x^j = x$.



- Kompakt: $M \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní, pokud z každé posloupnosti v M lze vybrat konvergentní podposloupnost

  $M \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní $\iff$ M je uzavřená a omezená
- spojitá funkce je omezená na (neprázdném) kompaktu a nabývá zde svého maxima a minima.

Příklady

Určete definiční obor a obor spojitosti následujících funkcí

1) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

definiční obor: $x^2+y^2 > 0$ pro každé $[x,y] \in \mathbb{R}^2 \setminus \{[0,0]\} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{[0,0]\}$

Pozor, bylo by chybou přepsat zadání na $\sqrt{x^2+y^2}$, pak by byl definiční obor celé $\mathbb{R}^2$. Funkce je svázaná se svým definičním oborem, jednalo by se prakticky o jinou funkci.

Spojitost: Funkce x^2+y^2 je spojitá na $\mathbb{R}^2$, neboť x^2 je spojitá na $\mathbb{R}$, y^2 také a součet je spojitý. Tedy x^2+y^2 je spojitá i na $\mathbb{R}^2 \setminus \{[0,0]\}$.

Funkce $\sqrt{x^2+y^2}$ je spojitá na $\mathbb{R}^2$, neboť se jedná o složení spojitých funkcí $\sqrt{\cdot}$ a x^2+y^2. Na $\mathbb{R}^2 \setminus \{[0,0]\}$ je spojitá a nenulová.

Podíl funkcí x^2+y^2 a $\sqrt{x^2+y^2}$ je tedy spojitý na $\mathbb{R}^2 \setminus \{[0,0]\}$.

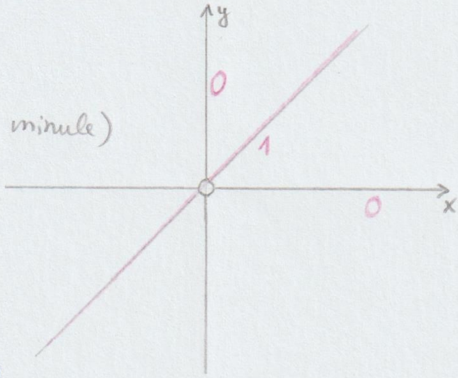
2)

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

definiční obor : $x^2y^2 + (x-y)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2y^2 = -(x-y)^2$ ... to je možné, jen když je vpravo i vlevo 0

$\Rightarrow x=y \wedge (x=0 \vee y=0) \Rightarrow x=y=0$

$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{[0,0]\}$.



funkce je spojitá na svém definičním oboru.

(obdobně jako minule)

existuje limita v bodě $[0,0]$? $f(x,0) = \frac{0}{x^2}$, $x \neq 0$.

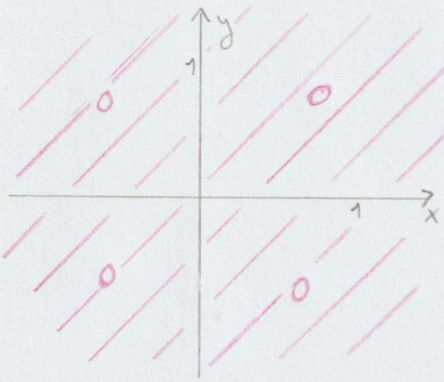
$f(0,y) = \frac{0}{y^2}$, $y \neq 0$.

$f(x,x) = \frac{x^4}{x^4+0} = 1$, $x \neq 0$

$\Rightarrow$ nelze ji v nule spojitě dodefinovat (libovolně blízko by byla hodnota 1 i 0 $\Rightarrow$ pro $\varepsilon < \frac{1}{2}$ nelze splnit podmínku spojitosti)

↳ spojité dodefinování se někdy hodí, například u extrémů

3) $f(x,y) = \begin{cases} 0 & , [x,y] \in \mathbb{R}^2, x \neq 0, y \neq 0 \\ 1 & , [x,y] \in \mathbb{R}^2, x = 0 \vee y = 0 \end{cases}$



definiční obor : $D_f = \mathbb{R}^2$

spojitost: funkce je spojitá na množině

$\mathbb{R}^2 \setminus (\{[x,y], x=0\} \cup \{[x,y], y=0\})$ vzhledem k $\mathbb{R}^2$ } je tam konstantní

funkce je spojitá na množině

$M = \{[x,y], x=0\} \cup \{[x,y], y=0\}$ vzhledem k M,

ale není spojitá na M vzhledem k $\mathbb{R}^2$ (body M jsou body nespojitosti funkce v $\mathbb{R}^2$)

proč:

pro $[0,y]$, $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ máme $\underbrace{f(0,y_n)}_{=1} \to 1$ pro $y_n \to y$,

$\underbrace{f(x_n,y)}_{=0} \to 0$ pro $x_n \to 0, x_n \neq 0$

a tedy z Heineovy věty f není spojitá v $[0,y]$

pro $[x,0]$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ obdobně: $f(x,y_n) \to 0$ pro $y_n \to 0$, $y_n \neq 0$

pro $[0,0]$: $f(x_n,x_n) \to 0$ pro $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$.

$f(0,0) = 1$.

Jinak: pomocí $\varepsilon\, \delta$ definice, $\varepsilon < \frac{1}{2}$ stačí.

Obor spojitosti: $\mathbb{R}^2 \setminus (\{[x,y], x=0\} \cup \{[x,y], y=0\})$

body nespojitosti: $\{[x,y], x=0\} \cup \{[x,y], y=0\}$

Příklady na parciální derivace

- značíme $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ a podobně
- strategie – umět derivovat jednu proměnnou!
  - na chvíli ostatní písmenka považovat za obyčejné konstanty $\in \mathbb{R}$ (třeba $z=2$)
  - praxe

1) Spočtěte parciální derivace funkce tam, kde existují

a) $f(x,y) = x^2+y^2+5xy$. $D_f = \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x+5y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y+5x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = 5 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 5$$

(není to náhoda, jak uvidíme později)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = 2$$

b) $f(x,y,z) = xyz + x\log z + z^2y$. $D_f = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3, z>0\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = yz + \log z$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = xz + z^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = xy + \frac{x}{z} + 2zy$$

($z \neq 0$ už máme)

… další příklady obdobné, nic světoborného, důležitá je jen praxe.

Samostatná práce: příklady na stránce