14. Seminář z Matematiky 2 - 20.5.2021

Téma: Řady s obecnými členy, vyšetřování AK a NAK

Opakování teorie

• **Leibnizovo kritérium:**

Nechť je posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ • monotónní
• $\lim a_n = 0$.

Potom $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konverguje.

• $\sum |a_n|$ Konverguje (K), tj. $\sum a_n$ je absolutně konvergentní (AK) $\Rightarrow$ $\sum a_n$ je konvergentní

Pokud $\sum |a_n|$ diverguje (D) a $\sum a_n$ konverguje, říkáme, že $\sum a_n$ je neabsolutně konvergentní (NAK)

Příklady

1) Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{arctg} n \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{n}$

Řešení

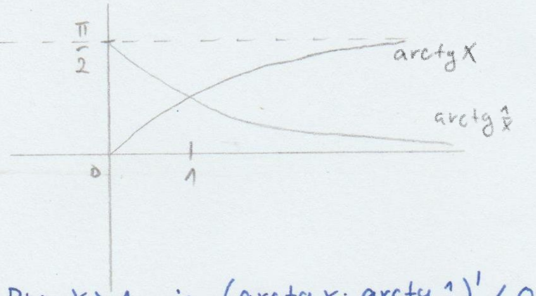
Použijeme Leibnizovo kritérium. Ukážeme monotonii a konvergenci k 0 posloupnosti $\operatorname{arctg}\frac{1}{n} \cdot \operatorname{arctg} n$

• $\lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} n = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg}\frac{1}{n} = 0$ (např. Heine + VOLSF(P))

$\Rightarrow \lim \operatorname{arctg} n \cdot \operatorname{arctg}\frac{1}{n} = 0$

• na monotonii použijeme vyšetření monotonie funkce $\operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ pomocí derivace

$$\left(\operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{1+x^2}\cdot \operatorname{arctg}\frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{1}{1+x^2}\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x}{1+x^2}$$



Pro $x \geq 1$ je $(\operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{arctg}\frac{1}{x})' \leq 0$ a tedy je nerostoucí. Tedy posloupnost $\operatorname{arctg} n \cdot \operatorname{arctg}\frac{1}{n}$ je monotónní.

• ověřili jsme předpoklady Leibnizova kritéria a tedy $\sum (-1)^n \operatorname{arctg} n \cdot \operatorname{arctg}\frac{1}{n}$ K.

2) Vyšetřete v závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergenci řady $\sum (-1)^n \cdot \frac{1}{n^\alpha}$

Řešení

AK| $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ K $\Leftrightarrow \alpha > 1$ ... tedy $\sum (-1)^n \frac{1}{n^\alpha}$ AK $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

NAK| Pro $\alpha \in (1, \infty)$ konvergence $\sum (-1)^n \frac{1}{n^\alpha}$ plyne z absolutní konvergence

Pro $\alpha \leq 1$ nás zajímá, kdy platí $\frac{1}{n^\alpha}$ je monotónní a konverguje k 0.

- monotonie je splněna vždy z monotonie mocniny
- pro $\alpha \in (-\infty, 0\rangle$: $\lim \frac{1}{n^\alpha} \neq 0$, tedy ani $\lim (-1)^n \frac{1}{n^\alpha} \neq 0$ a $\sum (-1)^n \frac{1}{n^\alpha}$ nesplňuje nutnou podmínku konvergence řad
- pro $\alpha \in (0, 1\rangle$: $\lim \frac{1}{n^\alpha} = 0 \Rightarrow$ z Leibnizova kritéria $\sum (-1)^n \frac{1}{n^\alpha}$ konverguje

Závěr: pro $\alpha \in (-\infty, 0\rangle$ diverguje
$\alpha \in (0, 1\rangle$ konverguje neabsolutně
$\alpha \in (1, \infty)$ konverguje absolutně

3) Vyšetřete v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$ konvergenci řady $\sum (-1)^n \frac{a^n}{3^n \sqrt{n}}$

Řešení

$\sum |a_n| = \sum \frac{|a^n|}{3^n \sqrt{n}}$ ... na Cauchyovo kritérium

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a|}{3} \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{|a|}{3}$

$|a| < 3 \Rightarrow \sum a_n$ konverguje absolutně

$|a| = 3$ ... nevíme nic

$|a| > 3 \Rightarrow$ není splněna nutná podmínka konvergence, $\sum a_n$ D.

$a = 3$: $\sum a_n = \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ K z Leibnizova kritéria, neboť $\frac{1}{\sqrt{n}} \searrow 0$.
$\sum |a_n| = \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ D ze srovnávací škály $(\frac{1}{2} < 1)$
$\Big\}\ \sum a_n$ NAK

$a = -3$: $\sum a_n = \sum \frac{(-1)^n \cdot (-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ D

Závěr: Pro $a \in (-\infty, -3\rangle$ diverguje
$a \in (-3, 3)$ konverguje absolutně
$a = 3$ konverguje neabsolutně
$a \in (3, \infty)$ diverguje