13. Seminář z Matematiky 2 – 13.5.2021

Téma: Konvergence řad s nezápornými členy

Opakování teorie

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je

konvergentní, pokud $\exists \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n \in \mathbb{R}$ (budeme značit $\sum a_n$ K)

divergentní, pokud není konvergentní (budeme značit $\sum a_n$ D)

absolutně konvergentní, jestliže $\sum |a_n|$ K (to navíc implikuje, že $\sum a_n$ K – V.58)

neabsolutně konvergentní, jestliže $\sum a_n$ K a $\sum |a_n|$ D

Nutná podmínka konvergence

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ K} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0}$$

Kritéria pro řady s nezápornými členy:

- srovnávací: Nechť $\forall n \in \mathbb{N}: 0 \le a_n \le b_n$. Pak $\sum b_n$ K $\Rightarrow \sum a_n$ K

  ↳ stačí $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \ge n_0$ –||– $\quad \sum a_n$ D $\Rightarrow \sum b_n$ D.

- limitní srovnávací: Nechť $\forall n \in \mathbb{N}: 0 \le a_n, b_n$ a $\exists \lim \frac{a_n}{b_n} = c \in \mathbb{R}^*$.

  Je-li $c \in (0,\infty)$, pak $\sum a_n$ K $\Leftrightarrow \sum b_n$ K

  $c = 0$, pak $\sum b_n$ K $\Rightarrow \sum a_n$ K – tzn. b_n je "silnější" a tedy K i "slabší"

  $c = \infty$, pak $\sum b_n$ D $\Rightarrow \sum a_n$ D – tzn. b_n je "slabší" a tedy D i "silnější"

- Cauchyovo odmocninové: Nechť $\forall n \in \mathbb{N}: 0 \le a_n$. Pak platí

  $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1 \Rightarrow \sum a_n$ K

  $\lim \sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow \sum a_n$ D

- D'Alembertovo podílové: Nechť $\forall n \in \mathbb{N}: 0 < a_n$. Pak platí

  $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \sum a_n$ K

  $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow \sum a_n$ D.

Základní srovnávací škála: (V.62)

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \text{ K} \Leftrightarrow \alpha > 1}$$

Příklad na srovnávací kritérium

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^2+1}{m^3+4} \qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^2+1}{n^{3,5}+4}$$

Krok 1 - ověření nezápornosti členů

$\forall n \in \mathbb{N}$: $m^2+1 > 0$

$m^3+4 > 0$

$m^{3,5}+4 > 0$.

Krok 2.0 (nepovinný) - odhad, jak se řada "chová", je-li to možné

ad 1) $\frac{m^2+1}{m^3+4} \approx \frac{m^2}{m^3} = \frac{1}{m}$ ... asi bude divergovat

ad 2) $\frac{m^2+1}{m^{3,5}+4} \approx \frac{m^2}{m^{3,5}} = \frac{1}{m^{1,5}}$ ... asi bude konvergovat

Krok 2 - srovnávací kritérium

z 2.0 víme, že chceme jít dolu

ad 1) $a_n = \frac{m^2+1}{m^3+4} \geq \frac{m^2}{m^3+4} \geq \frac{m^2}{m^3+4n^3} = \frac{m^2}{5n^3} = \frac{1}{5n}$ ... , řada $\sum \frac{1}{5n}$ D $\overset{SK}{\Rightarrow}$ $\sum a_n$ D

ad 2) $b_m = \frac{m^2+1}{n^{3,5}+4} \leq \frac{m^2+m^2}{n^{3,5}} = \frac{2n^2}{m^{3,5}} = 2 \cdot \frac{1}{m^{1,5}}$ ... řada $\sum \frac{2}{m^{1,5}}$ K $\overset{SK}{\Rightarrow}$ $\sum b_m$ K

z 2.0 víme, že chceme jít nahoru

Příklad na limitní srovnávací kritérium

$$\sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{\frac{n^5+3n^3+n+1}{n^4+2n^6+n^7+6}}_{a_n}$$

Krok 1: $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_n \geq 0$ (podíl součtů kladných čísel)

Krok 2.0: opět odhadneme, jak se řada chová, resp. čím budeme dělit

$$\frac{n^5+3n^3+n+1}{n^7+2n^6+n^4+6} \approx \frac{n^5}{n^7} = \frac{1}{n^2}$$

Krok 2 limitní srovnávací kritérium

Srovnáme s řadou $\sum b_m = \sum \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_m} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^5+3n^3+n+1}{n^4+2n^6+n^7+6}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^7+3n^5+n^3+n^2}{n^7+2n^6+n^4+6} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^5}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^7}} \overset{VOAL}{=} 1 \in (0,\infty)$$

Řada $\sum \frac{1}{n^2}$ konverguje z Věty 62 a tedy z LSK konverguje i řada $\sum a_n$.

Příklad s parametrem - hodí se LSK

Vyšetřete konvergenci řady v závislosti na parametru α

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

Řešení

- Jedná se o řadu s nezápornými členy, neboť $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} > \sqrt{n}-\sqrt{n} = 0$ a $n^{\alpha} > 0$, můžeme použít limitní srovnávací kritérium

- Máme

$$n^{\alpha}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{n^{\alpha}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \approx \frac{n^{\alpha}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}-\alpha}}$$, takže použijeme

pro srovnání řadu $\sum \frac{1}{n^{\frac{1}{2}-\alpha}}$, která $K \Leftrightarrow \frac{1}{2}-\alpha > 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} > \alpha$

- $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\alpha}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \overset{VOAL}{=} \frac{1}{2} \in (0,\infty)$$

Závěr:

Z LSK $\sum n^{\alpha}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ $K \Leftrightarrow \sum n^{\alpha-\frac{1}{2}}$ $K \Leftrightarrow \alpha \in (-\infty, -\frac{1}{2})$.

Příklad na Cauchyovo odmocninové kritérium

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{5^n}$$

Řešení

- $\forall n \in \mathbb{N}: \frac{n^5}{5^n} \geq 0.$

- $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^5}{5^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^5}{5} \overset{VOAL}{=} \frac{1}{5} < 1$$, tedy dle Cauchyova odmocninového kritéria

řada konverguje.

Příklad na d'Alembertovo podílové kritérium

$$\sum \frac{2^n}{n!}$$

Řešení

- $\forall n \in \mathbb{N}: \frac{2^n}{n!} > 0.$

- $$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1$$, tedy dle d'Alembertova podílového kritéria

řada konverguje.

Příklad na kombinaci kritérií

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n+3^n}$$

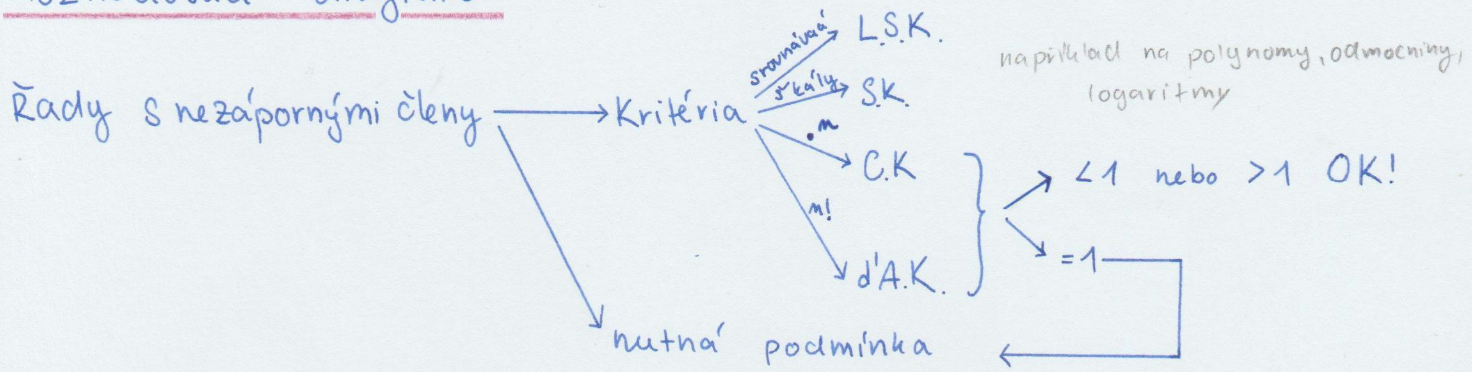
Řešení

- $\forall n \in \mathbb{N}: \dfrac{n^5}{2^n+3^n} \geq 0$
- Máme $\dfrac{n^5}{2^n+3^n} < \dfrac{n^5}{3^n}$

$$\lim \sqrt[n]{\frac{n^5}{3^n}} = \lim \frac{n^{\frac{5}{n}}}{3} = \lim \frac{1}{3} \cdot \left(\sqrt[n]{n}\right)^5 = \frac{1}{3} < 1$$

Tedy z Cauchyova odmocninového kritéria $\sum \frac{n^5}{3^n}$ K a tedy ze srovnávacího kritéria $\sum \frac{n^5}{2^n+3^n}$ K.

Rozhodovací diagram



Několik příkladů na procvičení

1) $\sum \dfrac{2^n}{3^n}$ 2) $\sum \dfrac{1}{(2+\frac{1}{n})^n}$ 3) $\sum \dfrac{n\sqrt{n}+2n}{n^2+2n^3}$ 4) $\sum \dfrac{n!}{2^{n^2}}$