12. Seminář z Matematiky 2 - 6.5.2021

Téma: Soustavy lineárních rovnic

- Soustavu

$a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$

$\vdots$

$a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n$

lze zapsat též jako

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\mathbb{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

Metody řešení - úpravy rovnic (středoškolsky)

- zápis do rozšířené matice soustavy $(\mathbb{A}|b)$, převod na schodovitou matici, přečtení výsledku
- Cramerovo pravidlo: $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ regulární, řešíme soustavu $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$

Pak

$$x_j = \frac{\begin{array}{ccc} 1 \ldots & \ldots j \ldots & \ldots n \\ \end{array} \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{m1} & \ldots & b_m & \ldots & a_{mn} \end{vmatrix}}{\det \mathbb{A}}$$

Může být:
- právě jedno řešení $\Leftrightarrow$ matice soustavy je regulární: $h(\mathbb{A}) = n$
- 0 řešení $\Leftrightarrow$ matice soustavy má menší hodnost než rozšířená matice soustavy: $h(\mathbb{A}) < h(\mathbb{A}|b)$
- nekonečno řešení $\Leftrightarrow$ $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}|b) < n$

Příklady

1) Řešte

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 2$$
$$2x_1 - x_2 - x_3 = 0.$$

Řešení:

Zapíšeme jako rozšířenou matici soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

Nyní si můžeme představit opět roznásobení $\mathbb{A}' \cdot \vec{x} = b'$

Získáváme

III. $-2x_3 = -3 \Rightarrow x_3 = \frac{3}{2}$

II. $-x_2 + x_3 = -x_2 + \frac{3}{2} = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}$

I. $x_1 + x_2 - x_3 = x_1 + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow x_1 = 1$

Závěr

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

2) Řešte soustavu
$$\begin{aligned} a+b+2c&=1\\ b+c&=0\\ a+b+2c&=-1 \end{aligned}$$

Jak by vypadalo řešení pro pravou stranu $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$?

Řešení:

Chce-li po nás zadavatel dvě různé pravé strany, nemusíme je řešit postupně, ale můžeme upravovat obě najednou.

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

1. pravá strana dává

III. $0a+0b+0c=-2 \Rightarrow$ soustava nemá řešení

2. pravá strana dává

III. $0a+0b+0c=0$ ... neřekl nám nic

II. $b+c=2 \Rightarrow$ můžeme zvolit $c=t,\ t\in\mathbb{R}$

pak $b=2-c=2-t$

I. $a+b+2c=a+2-t+2t=1 \Rightarrow a=-t-1$

Závěr

Řešení původní soustavy neexistuje. Řešení soustavy s pravou stranou $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ je $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-t-1\\-t+2\\t\end{pmatrix},\ t\in\mathbb{R}$.

3) na procvičení:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Kontrolní otázka: co by se stalo, kdyby tady nebyla 2?

$x_3=1$

$x_1+2x_2+3x_3=x_1+2x_2+3=2$

$x_1=-1-2x_2 \Rightarrow \begin{matrix} x_2=t,\ t\in\mathbb{R}\\ x_1=-1-2t \end{matrix}$

Závěr

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-2t\\t\\1\end{pmatrix},\ t\in\mathbb{R}.$$

Poznámka: neznámých, které nejsou vázané na ostatní, může být i víc

4) řešte pomocí Cramerova pravidla

$$x_2 + x_3 = 1$$
$$2x_1 - 7x_2 + x_3 = 0$$
$$3x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -7 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\det A = 2+3+21-2 = 24$ $\Rightarrow$ A je regulární, můžeme použít Cramerovo pravidlo

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{24} = \frac{-7+2+14-1}{24} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{24} = \frac{7-2}{24} = \frac{5}{24}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -7 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{24} = \frac{2+21-4}{24} = \frac{19}{24}$$

Závěr $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{5}{24} \\ \frac{19}{24} \end{pmatrix}$.