11. Seminář z Matematiky 2 - 29.4.2021

Téma: Inverzní matice a determinanty

Příklad 2 (z minula) Určete hodnost matice $\mathbb{A}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-3) \\ \cdot(-2) \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & 2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-5) \\ \cdot(-2) \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 24 & 37 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \cdot\left(-\frac{5}{24}\right) \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 24 & 37 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{24}\cdot 37+10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 24 & 37 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad h(\mathbb{A}) = 4.$$

Inverzní matice

- metoda: vezmeme matici $(\mathbb{A}|\mathbb{I})$ a pomocí řádkových úprav převedeme $\mathbb{A}$ na $\mathbb{I}$. V pravé polovině nám vznikne $\mathbb{A}^{-1}$.
- poznámka: pokud matice nebude regulární (nemá plnou hodnost) nebude $\mathbb{A}^{-1}$ existovat.

Příklady

1) Nalezněte inverzní matici matice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Řešení:

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{l} \\ \cdot(-3) \\ \cdot(-1) \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{l} \\ \cdot\frac{1}{4} \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{l} \\ \cdot(-2) \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{8} & \frac{1}{4} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Zkouška

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{5}{8} & \frac{1}{4} & -2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Závěr:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{5}{8} & \frac{1}{4} & -2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Naleznete inverzní matici matice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Řešení

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$\cdot(-1)$ $\qquad$ $\cdot(-1)$

Matice není regulární, inverzní matice neexistuje.

Poznámka:

Pro matice $M(2\times 2)$ můžeme použít vzorec:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Inverzní matice existuje $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.

Determinanty

• Definice (induktivní): Nechť $A \in M(n\times n)$. Determinant A definujeme takto:

$$\det A = \begin{cases} a_{11} & , n=1 \\ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} & , n>1 \end{cases}$$

kde A_{i1} je matice A po vynechání i-tého řádku a 1. sloupce.

• Také platí

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik} \quad \ldots \text{ rozvoj podle } k\text{-tého sloupce}$$

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det A_{kj} \quad \ldots \text{ rozvoj podle } k\text{-tého řádku}$$

- při výpočtu tedy zmenšujeme determinanty rozvíjením, až se dostaneme na velikost, kterou už umíme jednoduše řešit (3×3, 2×2).

↳ VIZ 6. seminář

• elementární úpravy a determinanty:

(i) záměna 2 řádků → přenásobení determinantu -1 $(\det A' = -\det A)$

(ii) vynásobení 1 řádku nenulovým číslem α → přenásobí determinant α $(\det A' = \alpha \det A)$

(iii) přičtení násobku jednoho řádku k jinému → nestane se nic: 1 $(\det A' = \det A)$

• metoda výpočtu: rozvojem podle řádku nebo sloupce
převodem do odstupňovaného tvaru a pak vynásobením diagonály
kombinace předchozích metod (eliminace sloupce a rozvoj podle něj)

Příklady : Vypočtete determinanty

a) **rozvojem** - je vhodné si nalézt řádek nebo sloupec s co nejvíce nulami

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}\cdot 0 + (-1)^{3+2}\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+4}\cdot 0 =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot1\cdot1+3\cdot0\cdot0+0\cdot2\cdot2-0\cdot1\cdot0-2\cdot0\cdot1-1\cdot2\cdot3$$

$$= 1\cdot(1-6)+1\cdot(4-2) = \underline{\underline{-3}}$$

b) převodem na trojúhelníkovou matici

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{vmatrix} = 3\cdot2\cdot(-3)\cdot 11 = \underline{\underline{-198}}$$

c) kombinace metod

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -7 & -6 \\ 0 & -2 & -5 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -1 & -7 & -6 \\ -2 & -5 & -2 \end{vmatrix} = 42+15+12-42-90-2 = \underline{\underline{-65}}$$

Poznámky

- $\det A\cdot B = \det A \cdot \det B$
- $\det A \neq 0 \iff A$ je regulární
- před řešením je dobré si promyslet, kudy na to, zapisovat kroky.