10. Seminář z Matematiky 2 - 22. 4. 2021

Téma: Extrémy funkcí více proměnných - počítání; Úvod do matic

1) Počítání: na stránce semináře se objevil soubor s řešenými písemkovými příklady na extrémy z akademického roku 97/98.

2) Matice (disciplína: Lineární algebra)

- matice: tabulka čísel o m řádcích a n sloupcích, $m, n \in \mathbb{N}$. $\mathbb{A} \in M(m \times n)$.
- umíme je násobit konstantou, a jsou-li kompatibilních velikostí, také sčítat a násobit mezi sebou
- násobení obecně není komutativní (nedá se měnit pořadí)

Příklady

$\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5 & 6 & 7\\8 & 9 & 0\end{pmatrix} = ?$ nejsou kompatibilní $\quad \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5 & 6\\7 & 8\end{pmatrix} = ? \quad \begin{pmatrix}1+5 & 2+6\\3+7 & 4+8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6 & 8\\10 & 12\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}5 & 6\\7 & 8\\9 & 0\end{pmatrix} = ?$ nejsou kompatibilní $\quad \begin{pmatrix}5 & 6\\7 & 8\\9 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix} = ? \quad \begin{pmatrix}5+18 & 10+24\\7+24 & 14+32\\9+0 & 2\cdot 9+0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}23 & 34\\31 & 46\\9 & 18\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 0\end{pmatrix}$

- regulární matice: $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ je regulární, jestliže $\exists$ matice $\mathbb{B}$, že $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = \mathbb{I}$
  $\mathbb{B}$ pak nazýváme inverzní matice a značíme $\mathbb{A}^{-1}$.
- hodnost matice: maximální počet lineárně nezávislých řádků. Značíme $h(\mathbb{A})$.
- schodovitá matice: $\forall i \in \{2, \dots, m\}$ platí, že i-tý řádek je nulový nebo začíná větším počtem nul než $(i-1)$-tý řádek 
  - hodnost schodovité matice je rovna počtu jejích nenulových řádků
- elementární řádkové úpravy: (i) záměna 2 řádků
  (ii) vynásobení řádku nenulovým číslem
  (iii) přičtení násobku jednoho řádku k jinému
  - dají se vrátit
  - skládají se z nich transformace, značíme $\sim$
- Věta 40 a Lemma 39: Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$. Pak $\mathbb{A}$ je regulární $\Leftrightarrow h(\mathbb{A}) = n$.
  Je-li $h(\mathbb{A}) = n$, pak $\exists$ transformace, která převede $\mathbb{A}$ na $\mathbb{I}$.
  Záznamem této transformace umíme najít $\mathbb{A}^{-1}$.

Poznámka k extrémům (LM): jelikož hodnost schodovité matice je počet nenulových řádků a hodnost je také počet lineárně nezávislých řádků, můžeme matice a převod do schodovitého tvaru s výhodou použít na hledání závislosti v metodě Langrangeových multiplikátorů u bodů (I) druhu.

Úprava na schodovitý tvar, určování hodnosti ("Gaussova eliminace")

Příklad 1 Určete hodnost matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -2\cdot 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$\cdot(-2)$

Příklad 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$ příště

Příklad 3

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\cdot(-2)$, $\cdot(-3)$, $\cdot(-1)$

Hodnost matice A je 2.

Příklad 4

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$\cdot(-1)$, $\cdot 2$

Poznámka: lze použít i sloupcové úpravy, ale opatrně (později se nám to nebude hodit)

Příklad 5

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Příklad 6

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Příklad 7

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 5 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Příklad 8

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Příklad 9

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Příklad 10

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Příklad 11

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Příklad 12

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 8 & 10 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Příklad 13

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$