1. Seminář z Matematiky 2 - 18.2.2021

Hana Turčinová - turcinova@karlin.mff.cuni.cz

Cvičení/Seminář: přes Zoom, zápisky na webu
na zápočet alespoň 50% docházka

Téma: Funkce více proměnných - úvod

Budeme se zabývat funkcemi typu $F: M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}^n$, tedy $[x_1, \dots, x_n] \to F(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$, jejich definičními obory, obory hodnot, grafy, řezy grafem, vrstevnicemi, ...

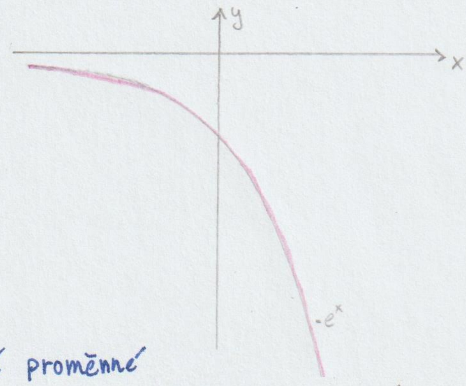
Příklady (obvykle v $\mathbb{R}^2$, neboť vyšší dimenze se hůře představují)

Příklad 1

Určete definiční obor a obor hodnot funkce $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = e^x + y$.
Jak vypadá množina $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = c\}$ pro $c = 0$ (vrstevnice ve výšce c)?
Zakreslete řez grafu funkce f rovinou $\{(x,0), x \in \mathbb{R}\}$, $\{(x,1), x \in \mathbb{R}\}$ a $\{(0,y), y \in \mathbb{R}\}$

Řešení

- $D_f = \mathbb{R}^2$, neboť e^x je definovaná na $\mathbb{R}$, y je definovaná na $\mathbb{R}$, součet je definován na $\mathbb{R}^2$
  $H_f = \mathbb{R}$, neboť každé $z \in \mathbb{R}$ můžeme vzít $y = -e^0 + z = z - 1$, a tedy $f(0, z-1) = e^0 + z - 1 = z$.
- vrstevnice $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, e^x + y = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y = -e^x\}$

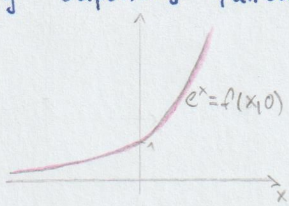


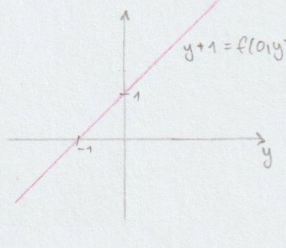
  - na této množině nabývá funkce hodnoty 0, tedy graf protíná rovinu x, y
  - otázka jak by vypadala vrstevnice pro $c = -1$, $c = 1$?

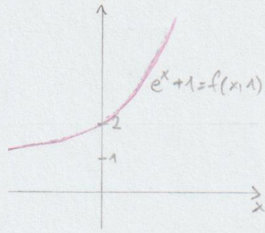
- řezy rovinami kolmými na osy x, y odpovídají funkcím jedné proměnné
  $\{(x,0), x \in \mathbb{R}\}$: $f(x,0) = e^x$

  $\{(0,y), y \in \mathbb{R}\}$: $f(0,y) = y + 1$

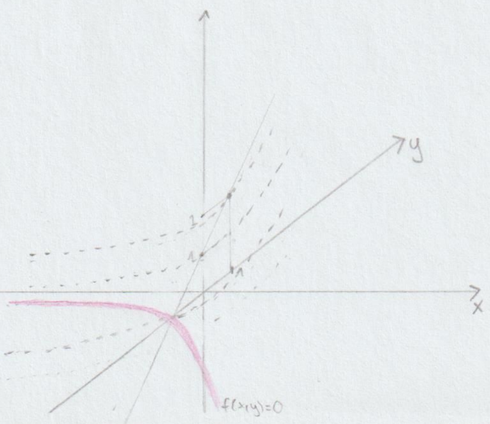
  $\{(x,1), x \in \mathbb{R}\}$: $f(x,1) = e^x + 1$







- náčrt grafu



Příklad 2

Určete definiční obor a obor hodnot funkce $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$.

Jak vypadá množina $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = c\}$ pro $c \in [0,1]$?

Zakreslete řez grafu rovinou $\{(x,0), x \in \mathbb{R}\}$.

Řešení

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 1-x^2-y^2 \geq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 1 \geq x^2+y^2\}$ ... koule se středem 0 a poloměrem 1 (značíme $\overline{B(0,1)}$)
(odmocnina je definovaná pro nezáporné hodnoty)

H_f: Víme $\sqrt{\cdot} \geq 0$ a že $1-x^2-y^2 \leq 1$ (neboť $x^2 \geq 0, y^2 \geq 0$), tedy $\sqrt{1-x^2-y^2} \leq 1$ ($\sqrt{\cdot}$ je rostoucí funkce)

Tedy $H_f \subset [0,1]$. Navíc $\forall z \in [0,1]$ můžeme vzít $y = \sqrt{1-z^2}$, $(0, \sqrt{1-z^2}) \in \overline{B(0,1)}$,

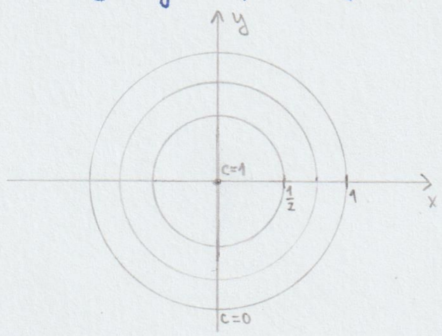
a dostáváme $f(0, \sqrt{1-z^2}) = \sqrt{1-0-(1-z^2)} = z$ (Pozor na operace s $\sqrt{\cdot}$, zde ok.)

Tedy $H_f = [0,1]$

Vrstevnice: $c \in [0,1]$

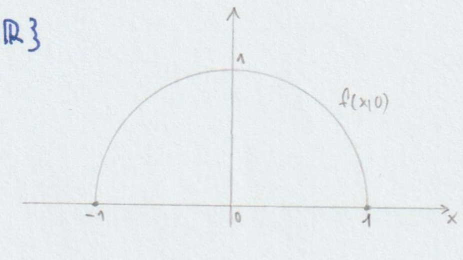
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \sqrt{1-x^2-y^2} = c\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 1-x^2-y^2 = c^2\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 = 1-c^2\}$

... kružnice se středem 0 a poloměrem $\sqrt{1-c^2}$, $c \in [0,1)$,
a bod $[0,0]$ pro $c = 1$.

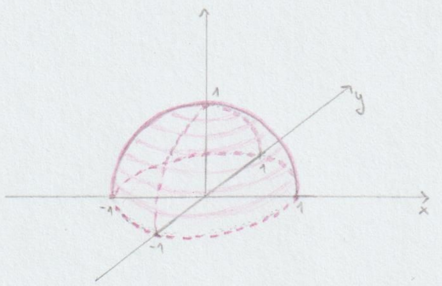


Řez rovinou $\{(x,0), x \in \mathbb{R}\}$

$f(x,0) = \sqrt{1-x^2}$



Náčrt grafu



... graf odpovídá polovině jednotkové sféry

Doplňující otázky

- Existuje funkce z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}$, jejíž graf by byla celá sféra?
- Najděte příklady dalších funkcí, jejichž vrstevnice jsou soustředné kružnice. Co mají tyto funkce společného?

Příklad 3

Určete definiční obor a obor hodnot funkce $f(x,y) = \operatorname{sgn}(\sin x \cdot \sin y)$

Jak vypadají množiny $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) \in = c\}$ pro $c \in \mathbb{R}$?

Načrtněte graf.

Řešení

$D_f = \mathbb{R}^2$, neboť sin je definovaná na $\mathbb{R}$ a sgn je definovaná na $\mathbb{R}$.

H_f: víme, že funkce sgn nabývá pouze 3 hodnot: $-1, 0, 1$. Tedy $H_f \subset \{-1, 0, 1\}$

Pro každou z těchto hodnot umíme najít vzor: $f(0,0) = \operatorname{sgn}(\sin 0 \cdot \sin 0) = 0$

$f(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = \operatorname{sgn}(1 \cdot 1) = 1$

$f(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}) = \operatorname{sgn}(1 \cdot (-1)) = -1$

Tedy $H_f = \{-1, 0, 1\}$

Vrstevnice

Pro $c \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ je množina $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = c\}$ prázdná

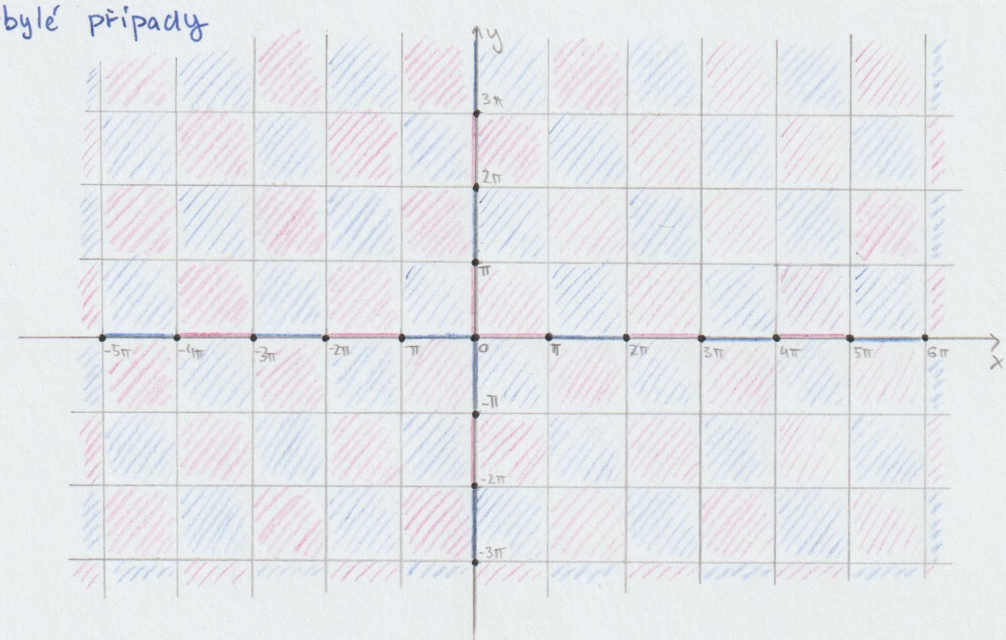
$c = -1$: $\{(x,y),\ \operatorname{sgn}(\sin x \cdot \sin y) = -1\} = \{(x,y),\ \sin x \cdot \sin y < 0\} = \{(x,y),\ \sin x > 0, \sin y < 0\} \cup \{(x,y),\ \sin x < 0, \sin y > 0\}$

$= \{(x,y),\ x \in (-\pi + 2k\pi, 2k\pi), y \in (2l\pi, \pi + 2l\pi), k, l \in \mathbb{Z}\} \cup \{(x,y),\ x \in (2k\pi, \pi + 2k\pi), y \in (-\pi + 2l\pi, 2l\pi), k, l \in \mathbb{Z}\}$

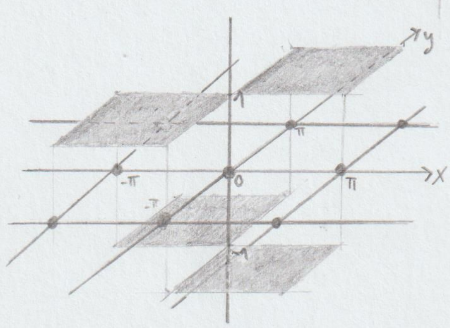
$c = 0$: $\{(x,y),\ \operatorname{sgn}(\sin x \cdot \sin y) = 0\} = \{(x,y),\ \sin x = 0 \vee \sin y = 0\} =$

$= \{(x,y),\ x = k\pi, k \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x,y),\ y = k\pi, k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}\}$

$c = 1$: zbylé případy



Náčrt grafu



Příklady na samostatnou práci

Určete definiční obory a obory hodnot následujících funkcí. Nakreslete vrstevnice funkcí a načrtněte graf.

1) $f(x,y) = x + \sqrt{y}$

2) $f(x,y) = x^2 + y^2$

3) $f(x,y) = \frac{y}{x}$

4) $f(x,y) = x^2 - y^2$

5) $f(x,y) = |x| + y$

6) $f(x,y) = \sqrt{xy}$

7) $f(x,y) = \sqrt{\sin(x^2+y^2)}$

8) $f(x,y) = \sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$

(Výsledky některých příkladů naleznete pod nadpisem Program cvičení na stránce semináře)