VRSTEVNICE FUNKCE, OTEVŘENÉ A UZAVŘENÉ MNOŽINY

Určete a nakreslete definiční obor a vrstevnice funkcí:

1. $f(x,y) = x + \sqrt{y}$

2. $f(x,y) = x^2 + y^2$

3. $f(x,y) = \frac{y}{x}$

4. $f(x,y) = x^2 - y^2$

5. $f(x,y) = \sqrt{xy}$

6. $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

7. $f(x,y) = |x| + y$

8. $f(x,y) = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$

9. $f(x,y) = \operatorname{sgn}(\sin x \cdot \sin y)$

10. $f(x,y) = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)}$

11.* Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a \le b$. Ukažte, že množina (a,b) je otevřená.

12.* Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a \le b$. Ukažte, že množina $\langle a, b\rangle$ je uzavřená.

13.* Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$. Dokažte, že množina M je uzavřená právě tehdy, když platí $\overline{M} = M$.

Rozhodněte, zda následující množiny jsou otevřené eventuálně uzavřené a určete vnitřek, uzávěr, hranici.

14.* $A_1 = \mathbb{Q}$

15.* $A_2 = \mathbb{N}$

16.* $A_3 = \{1/n; n \in \mathbb{N}\}$

17. $A_4 = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2; x > 0, y \le 0\}$

18. $A_5 = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$

19. $A_6 = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 \ge 1\}$

20. $A_7 = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2; x^2 + e^y > 17\}$

21. $A_8 = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 + 2xy = 5\}$

22. $A_9 = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3; x \ge 0, y > 0, x + y = 2, z \le 0\}$

23.* Určete uzávěr, hranici a vnitřek množiny $M = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ |x+y| - x - y > 0\}$.

24.* Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina, $f\colon G \to \mathbf{R}$ a $\alpha \in \mathbf{R}$. Potom jsou množiny

$$\{x \in G; f(x) > \alpha\} \quad \text{a} \quad \{x \in G; f(x) < \alpha\}$$

otevřené.

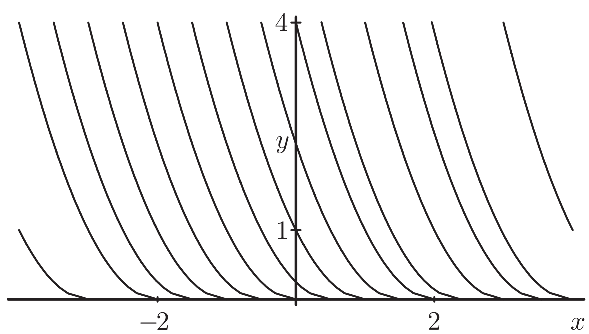
25.* Nechť $F \subset \mathbf{R}^n$ je uzavřená množina, $f\colon G \to \mathbf{R}$ a $\alpha \in \mathbf{R}$. Potom jsou množiny

$$\{x \in F; f(x) \ge \alpha\}, \quad \{x \in F; f(x) \le \alpha\} \quad \text{a } \{x \in F; f(x) = \alpha\}$$

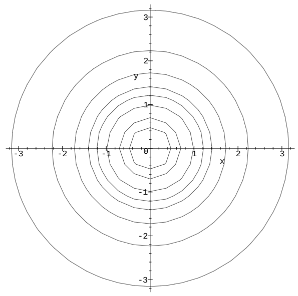
uzavřené.

NĚKTERÉ VÝSLEDKY

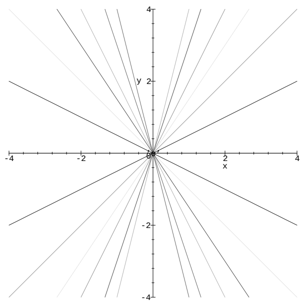
1.



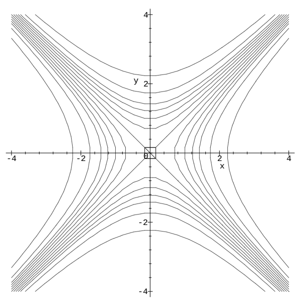
2.



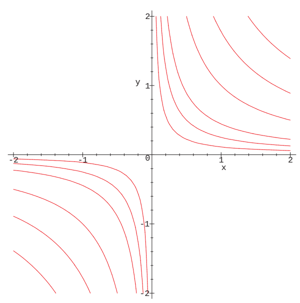
3.



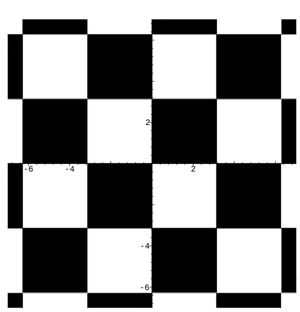
4.



5.



9.



14. A_1 není ani otevřená ani uzavřená, $\operatorname{int} A_1 = \emptyset$, $\overline{A_1} = \mathbf{R}$, $H(A_1) = \mathbf{R}$ **15.** A_2 je uzavřená a není otevřená, $\operatorname{int} A_2 = \emptyset$, $\overline{A_2} = \mathbb{N}$, $H(A_2) = \mathbb{N}$ **16.** A_3 není otevřená ani uzavřená,

$\operatorname{int} A_3 = \emptyset$, $\overline{A_3} = A_3 \cup \{0\}$, $H(A_3) = A_3 \cup \{0\}$ **17.** A_4 není otevřená ani uzavřená, $\operatorname{int} A_4 = (0, +\infty) \times (-\infty, 0)$, $\overline{A_4} = \langle 0, +\infty) \times (-\infty, 0\rangle$, $H(A_4) = \{0\} \times (-\infty, 0\rangle \cup \langle 0, +\infty) \times \{0\}$ **18.** A_5 je otevřená a není uzavřená, $\operatorname{int} A_5 = A_5$, $\overline{A_5} = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$, $H(A_5) = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ **19.** A_6 není otevřená a je uzavřená, $\operatorname{int} A_6 = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + y^2 > 1\}$, $\overline{A_6} = A_6$, $H(A_6) = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1\}$ **20.** A_7 je otevřená a není uzavřená, $\operatorname{int} A_7 = A_7$, $\overline{A_7} = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + e^y \geq 17\}$, $H(A_7) = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + e^y = 17\}$ **21.** A_8 není otevřená a je uzavřená, $\operatorname{int} A_8 = \emptyset$, $\overline{A_8} = A_8$, $H(A_8) = A_8$ **22.** A_9 není otevřená ani uzavřená, $\operatorname{int} A_9 = \emptyset$, $\overline{A_9} = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3; x \geq 0, y \geq 0, x + y = 2, z \leq 0\}$, $H(A_9) = \overline{A_9}$ **23.** $\operatorname{int} M = M$, $\overline{M} = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; x + y \leq 0\}$, $H(M) = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; x + y = 0\}$